論理を題材にした高等学校「数学 I」の課題学習
－真理値表の活用－

2018SS003 別府祐次
指導教員：小藤俊幸

1 はじめに

平成 20 (2008) 年の中央教育審議会答申において，算数・数学科の改善の基本方針について，次が示された ([1], p. 3).「算数的活動・数学的活動を生かした指導を一層充実し，また，言語活動や体験活動を重視した指導が行われるようにするために，－中略－，高等学校では，必履修科目や多くの生徒の選択が見込まれる科目に「課題学習」を位置付ける。」さらに，改善の具体的な事項について，次が示された (同上，p. 4).「「数学 I」及び「数学 A」には，実生活と関連付けたり，学習した内容を発展させたりして，生徒の関心や意欲を高める課題を設け，数学的活動を特に重視して行う課題学習を内容に位置づける。」これは，平成 30 (2018) 年の改訂にも引き継がれ,「数学 I」,「数学 II」,「数学 III」の科目に課題学習が設けられている．

教育実習で「数学 I」を担当し,「集合と命題」の授業実習に取り組む中で，教科書にある集合を用いた論理の説明では生徒の理解度が低いように感じていたところ，指導教員から，1970 年代から 1980 年にかけては，高等学校でも，現在は大学初年級で学ぶことが多い真理値表 (truth table) を用いた指導が行われていたこと [2, 3] を教わった．そうした時代の教科書や参考書を参考にして，生徒の関心を高め，論理についての理解が深まるような課題学習用の教材を作成することが本研究の目的である．

2 作成した教材

生徒が「数学 I」の「集合と命題」において，命題や条件について，否定,「かつ ($\wedge$)」,「または ($\vee$)」,「ならば ($\Rightarrow$) 」による合成，ド・モルガンの法則，対偶の法則，背理法を，通常の集合を用いた説明で学んだ後に，2 単位時間（50 分 ×2）で取り組むことを想定している．主な内容は次のようである．

1 時間目 論理の基礎事項の真理値表による説明

2 時間目 論理的な問題への真理値表の応用

以下，順に説明する．

2.1 1 時間目

はじめに，1980 年発行の教科書 [2] に沿って，真理値表の基礎事項を説明する．ただし，記号や用語は若干変えている．命題や条件を $p, q, r, \ldots$ のような記号で表し，命題の真を T (True)，偽を F (False) と書く．上の教科書では，○と×を用いている．合成命題 $\overline{p}$，$p \wedge q$，$p \vee q$ の真理値を真理値表で与える．生徒はすでに集合を用いた論理の説明を学んでいるので，さほど抵抗はないと思われる．

さらに，合成命題 $p \Rightarrow q$ の真理値が

p	q	$p \Rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

(1)

のように定められることを示す．仮定 p が偽の場合，結論 q の真偽に関わらず合成命題 $p \Rightarrow q$ が真になることに戸惑う生徒が多いと思われる．次のような例（[2], p. 262) で説明する.「”(天気がよい) $\Rightarrow$ (遠足に行く)” の命題は，この約束をまもったときには真であり，この約束を破ったときには偽であると考えられる．天気が悪い時は遠足に行っても行かなくてもこの約束を破ったことにはならない．つまり，天気がよく，かつ遠足に行かなかったときだけ，この命題は偽となる。」

さらに，命題 p, q の同値（$p \Leftrightarrow q$) を「$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$」で定めると，$p, q$ の真偽が一致する場合に限り，p, q は同値になる．したがって，例えば，次の真理値表から，対偶の法則「$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$」が示される．

p	q	$\overline{q}$	$\overline{p}$	$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$
T	T	F	F	T
T	F	T	F	F
F	T	F	T	T
F	F	T	T	T

(2)

こうした説明をした後に，次の課題に取り組ませる．

課題 1 真理値表を用いて，以下を示せ．

(1) $\overline{p \vee q} \;\Leftrightarrow\; \overline{p} \wedge \overline{q}$（ド・モルガンの法則）

(2) $\overline{p \wedge q} \;\Leftrightarrow\; \overline{p} \vee \overline{q}$（ド・モルガンの法則）

(3) $\overline{p \Rightarrow q} \;\Leftrightarrow\; p \wedge \overline{q}$（背理法の原理）

この課題に取り組むことを通じて，生徒は論理の基本的な法則への理解を深めることができると思われる．次は，1989 年出版の参考書の問題（[3], p.24) を愛知県の生徒が親しみをもつように書き直したものである．論理の法則を具体的な事例に応用させることを意図している．

課題 2 S さんが以下の 2 つのことを述べた．

(1) 私は岐阜県に住んでいます．

(2) 私が岐阜県に住んでいるならば，私は蜂の子を食べます．

S さんの言ったことは，どちらも本当かどちらもうそであるとする．S さんが岐阜県に住んでいるかどうかを判定せよ．

「S さんは岐阜県に住んでいる」を p,「S さんは蜂の子を食べる」を q とすると，真理値表 (1) から，p と $p \Rightarrow q$

がともに偽となることはないので，ともに真である．すなわち，S さんは岐阜県に住んでいて蜂の子を食べる．

2.2　2 時間目

次は，2014 年発行の教科書の課題学習「まんじゅう甘い?」([4]，p. 201) で取り上げられている課題の表現を変えたものである．

課題 3　茶色と白色のまんじゅうがいくつかあり，それぞれについてあんこが入っているものと入っていないものがある．また，甘いものと甘くないもの（「甘い」と「甘くない」はある基準に基づいて明確に区別できるものとする）がある．これらのまんじゅうを調べた結果，次のようなことが分かった．

(ア) 茶色で甘いまんじゅうならば，あんこが入っている．

(イ) あんこが入った甘いまんじゅうならば，茶色である．

次の **(1)**〜**(4)** が，必ず言えるかどうかを調べ，理由と結果を示せ．

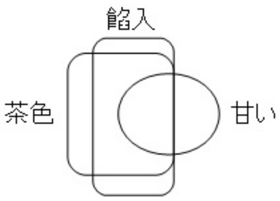
(1) あんこが入った茶色のまんじゅうならば，甘い．

(2) 白色で甘いまんじゅうならば，あんこが入っていない．

(3) あんこが入った白色のまんじゅうならば，甘くない．

(4) 白色であんこが入っていないまんじゅうならば，甘い．

上記の教科書 [4] では，まんじゅうの集合を考えて，与えられた関係を図示することが示唆されている．次のようなベン図を用いて解答すること想定していると思われる．



作成した教材では，次のような真理値表を示して，あり得ない場合を消去することを示唆する．例えば，**(ア)** の結果から，③ はあり得ない．また，真理値表の空白は，真か偽かを判定できないことを表す．

茶色	餡入	甘い	(ア)	(イ)	(1)〜(4)	
T	T	T	T	T	T	①
T	T	F				②
T	F	T	F		F	③
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

次は，大学の教科書の問題である ([5], p. 11)．

課題 4　以下の空欄を埋めよ（理由も説明せよ）．

ある冬の日，大雪のため交通機関に遅れが生じ，1 時限目の授業に多くの遅刻者が出た．このことについて，3 人の学生（サキ，レナ，ミナミ）が次のように主張した．

サキ　遅刻した学生は電車とバスの両方を利用していた．

レナ　電車もバスも利用しなかった学生は遅刻しなかった．

ミナミ　電車を利用しなかった学生は遅刻しなかった．

3 人の主張の論理関係は次のようになる．$\boxed{\text{ア}}$ が正しいとき，必ず $\boxed{\text{イ}}$ が正しい．また，$\boxed{\text{イ}}$ が正しいとき，必ず $\boxed{\text{ウ}}$ が正しい．

この課題は，1 時間目の復習も意図している．対偶の法則とド・モルガンの法則を用いて，**レナ**と**ミナミ**の主張を，**サキ**と同じ,「遅刻した学生は ... 」に直すと，

レナ　遅刻した学生は電車またはバスを利用した．

ミナミ　遅刻した学生は電車を利用した．

となる．下表 (遅刻が F の場合は，3 人とも T となるので省略) のうち，**サキ**の主張に該当するのは ① のみ，**レナ**の主張に該当するのは ①，②，③，**ミナミ**の主張に該当するのは ①，② であるから，**ア**が**サキ**，**イ**が**ミナミ**，**ウ**が**レナ**となる．この問題も集合を使って解くことができるので，解法の比較をさせることができる．

遅刻	電車	バス	サキ	レナ	ミナミ	
T	T	T	T	T	T	①
T	T	F	F	T	T	②
T	F	T	F	T	F	③
T	F	F	F	F	F	④

生徒にベン図を用いる方法と表を用いる方法で問題を解かせ，2 つの解法の長所，短所を比較させる.「ベン図を用いる解法は問題の意味が分かりやすいが，適切な図を描くのが難しい.」,「表を用いる方法は，問題の意味が把握しにくいが，形式的なやり方で解けるのでよい.」と言った意見が出ることが期待される．

3　おわりに

数学について正しく考えるための基盤となるものが「論理」である．物事に対して，命題を意識的にとらえ，考える対象と関係を明確にするということが，論理的に考える力や考えを整理する力に直結すると考える．

本研究によって，数学においてほとんどの議論が集合を前提としているが，命題の全体像を整理するという視点が数学の理解を助けてくれることが分かった．具体的には，集合を用いるだけでなく真偽表を用いて考えることで生徒の理解度を高めることにつながると考える．

教員を目指す者として，ただ教科書を教えるのではなく，教材研究を行い，考え方の原点である論理に目を向けながら生徒にとってわかりやすい授業へつなげるということを大切にしていきたい．

参考文献

[1] 文部科学省 :『高等学校学習指導要領解説　数学編　理数編』．実教出版，東京，2009.

[2] 小平邦彦 (編):『改訂数学 I』，VIII 写像・集合・論理，2 集合・論理．東京書籍，東京，1980.

[3] 秋山仁 :『数学の証明のしかた』，第 1 章 論理のしくみ．森北出版，東京， 2014. (駿台文庫, 1989.)

[4] 岡本和夫，新井仁之 (監修) :『数学 I』．実教出版，東京，2013.

[5] 小藤俊幸 :『考える力をつけるための微積分教科書 (第 2 版)』．学術図書出版社，2020.