多標本の正規分布モデルにおける平均と分散の同時相違検出のための統計的推測法

2018SS025 岩永英志　2018SS080 古賀祐亮

指導教員：白石高章

1　はじめに

本論文では，各標本の平均と分散が未知である k 標本の正規分布モデルにおける平均と分散を同時検出するための統計的推測法を考察する．

2　モデルの設定

ある要因 A があり, k 個の水準 $A_1, \cdots, A_k$ を考える. 水準 A_i における標本観測値 $\left(X_{i1}, \cdots, X_{in_i}\right)$ を第 i 標本という. X_{ij} は平均 μ_i, 分散 σ_i^2 である分布関数 $\Phi((x-\mu_i)/\sigma_i)$ をもつ正規分布 $N(\mu_i, \sigma_i^2)$ とする. すなわち各 X_{ij} $(j = 1, \cdots, n_i : i = 1, \cdots, k)$ は互いに独立で，$X_{ij} \sim N\left(\mu_i, \sigma_i^2\right)$ である. 総標本サイズを $n \equiv n_1 + \cdots + n_i$ とする. 平均 μ_i と分散 σ_i^2 の一様最小分散不偏推定量はそれぞれ,

$$\bar{X}_{i\cdot} \equiv \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}$$

$$\tilde{\sigma_i}^2 \equiv \frac{1}{n_i - 1}\sum_{j=1}^{n_i}\left(X_{ij} - \bar{X}_{i\cdot}\right)^2$$

である.

第 k 標本を対照群, 第 1 標本から第 $k-1$ 標本は処理群とし, 下の表 1 のモデルについて考察する.

表 1　k 標本モデル

水準	標本	サイズ	データ
処理 1	第 1 標本	n_1	$X_{11}, \cdots, X_{1n_1}$
処理 2	第 2 標本	n_2	$X_{21}, \cdots, X_{2n_2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
処理 $k-1$	第 $k-1$ 標本	n_{k-1}	$X_{k-1\ 1}, \cdots, X_{k-1n_{k-1}}$
対照	第 k 標本	n_k	$X_{k1}, \cdots, X_{kn_k}$

$i = 1, \cdots, k$ に対して,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n_i}{n} = \lambda_i \ (0 < \lambda_i < 1)$$

と仮定する.

$i = 1, \cdots, k-1$ に対して,「帰無仮説 $H_i : \mu_i = \mu_k$ かつ $\sigma_i^2 = \sigma_k^2$」とし,「対立仮説 $H_i^A : \mu_i \neq \mu_k$ または $\sigma_i^2 \neq \sigma_k^2$」とする.

3　統計量の漸近分布

統計量の漸近分布を求める.

命題 1　$n \to \infty$ として, $\sqrt{n}(\bar{X}_{i\cdot} - \mu_i) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{\sigma_i}{\sqrt{\lambda_i}} Z_i \sim N\left(0, \frac{\sigma_i{}^2}{\lambda_i}\right)$ が成り立つ.

証明　中心極限定理より,

$$\frac{\bar{X}_{i\cdot} - \mu_i}{\sqrt{V(\bar{X}_{i\cdot})}} = \frac{\sqrt{n_i}(\bar{X}_{i\cdot} - \mu_i)}{\sigma_i} \xrightarrow{\mathcal{L}} Z_i \sim N(0,1)$$

また,

$$\sqrt{\frac{n}{n_i}} \xrightarrow{P} \sqrt{\frac{1}{\lambda_i}}$$

スラツキーの定理より,

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_{i\cdot} - \mu_i)}{\sigma_i} \xrightarrow{\mathcal{L}} \sqrt{\frac{1}{\lambda_i}} Z_i \sim N\left(0, \frac{1}{\lambda_i}\right)$$

これらにより，結論を得る．□

命題 2　$n \to \infty$ として,

$$\sqrt{n}\left\{\log(\tilde{\sigma_i}^2) - \log(\sigma_i^2)\right\} \xrightarrow{\mathcal{L}} \sqrt{\frac{2}{\lambda_i}} Z_i \sim N\left(0, \frac{2}{\lambda_i}\right)$$

が成り立つ.

証明　$Y_{ij} \equiv X_{ij} - \mu_i$,　$\bar{Y}_{i\cdot} = \bar{X}_{i\cdot} - \mu_i$ とおくと,

$$\tilde{\sigma_i}^2 = \frac{1}{n_i - 1}\sum_{j=1}^{n_i}\left(Y_{ij} - \bar{Y}_{i\cdot}\right)^2 = \frac{1}{n_i - 1}\sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}{}^2 - \frac{n_i}{n_i - 1}\bar{Y}_{i\cdot}^2$$

となる．ここで,

$$\begin{aligned}
\sqrt{n}(\tilde{\sigma_i}^2 - \sigma_i^2) &= \frac{\sqrt{n}}{n_i - 1}\left\{(n_i - 1)\tilde{\sigma_i}^2 - (n_i - 1)\sigma_i^2\right\} \\
&= \frac{n_i}{n_i - 1}\sqrt{\frac{n}{n_i}}\sqrt{n_i}\left\{\frac{\sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}^2}{n_i} - \sigma_i^2\right\} \\
&\quad - \frac{n_i}{n_i - 1}\sqrt{\frac{n}{n_i}}\sigma_i\frac{\sqrt{n_i}\bar{Y}_{i\cdot}^2}{\sigma_i} + \frac{\sqrt{n}}{n_i - 1}\sigma_i^2
\end{aligned}$$

を得る．また,

$$\begin{aligned}
V\left(Y_{ij}^2\right) &= E\left(Y_{ij}^4\right) - \left\{E\left(Y_{ij}^2\right)\right\}^2 \\
&= E\left\{(X_{ij} - \mu_i)^4\right\} - \left\{E(X_{ij} - \mu_i)^2\right\}^2 \\
&= 3\sigma_i^4 - \sigma_i^4 = 2\sigma_i^4
\end{aligned}$$

となる．中心極限定理を適用することにより,

$$\frac{\sqrt{n_i}\left\{\frac{\sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}^2}{n_i} - \sigma_i^2\right\}}{\sqrt{V(Y_{ij}^2)}} = \frac{\sqrt{n_i}\left\{\frac{\sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}^2}{n_i} - \sigma_i^2\right\}}{\sqrt{2}\sigma_i^2} \xrightarrow{\mathcal{L}} Z_i \sim N(0,1)$$

を得,

$$\sqrt{n_i}\left\{\frac{\sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}^2}{n_i} - \sigma_i^2\right\} \xrightarrow{\mathcal{L}} \sqrt{2}\sigma_i^2 Z_i \sim N(0, 2\sigma_i^4)$$

が成り立つ．さらに，

$$\sqrt{n_i}\bar{Y}_{i\cdot} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, \sigma_i^2), \quad \bar{Y}_{i\cdot} \xrightarrow{P} 0$$

であるので，

$$\sqrt{n_i}\bar{Y}_{i\cdot}^2 \xrightarrow{P} 0$$

を得る．以上から，

$$\sqrt{n}(\tilde{\sigma}_i^2 - \sigma_i^2) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{\sqrt{2}\sigma_i^2}{\sqrt{\lambda_i}} Z_i \sim N\left(0, \frac{2}{\lambda_i}\sigma_i^4\right)$$

となる．デルタ法を適用することによって，結論

$$\sqrt{n}\{\log(\tilde{\sigma_i}^2) - \log(\sigma_i^2)\} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda_i}} Z_i \sim N\left(0, \frac{2}{\lambda_i}\right)$$

を得る． □

ここで，

$$U_i(\boldsymbol{\theta}) \equiv \frac{\bar{X}_{i\cdot} - \bar{X}_{k\cdot} - (\mu_i - \mu_k)}{\sqrt{\frac{\tilde{\sigma_i}^2}{n_i} + \frac{\tilde{\sigma_k}^2}{n_k}}}$$

$$V_i(\boldsymbol{\theta}) \equiv \frac{\log\tilde{\sigma_i}^2 - \log\tilde{\sigma_k}^2 - (\log{\sigma_i}^2 - \log{\sigma_k}^2)}{\sqrt{\frac{2}{n_i} + \frac{2}{n_k}}}$$

とおく．ただし，

$$\boldsymbol{\theta} \equiv \ (\mu_1, \cdots, \mu_k, \sigma_1^2, \cdots, \sigma_k^2)$$

とする．また，

$$U_i \equiv U_i(0, \cdots, 0, 1, \cdots, 1), V_i \equiv V_i(0, \cdots, 0, 1, \cdots, 1)$$

とおく．

命題 3 $n \to \infty$ として，$U_i(\boldsymbol{\theta}) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, 1)$ である．

証明 命題 1 より，

$$\sqrt{n}(\bar{X}_{i\cdot} - \mu_i) \xrightarrow{\mathcal{L}} \sqrt{\frac{1}{\lambda_i}}\sigma_i Z_i \sim N\left(0, \frac{\sigma_i^2}{\lambda_i}\right),$$

$$\sqrt{n}(\bar{X}_{k\cdot} - \mu_k) \xrightarrow{\mathcal{L}} \sqrt{\frac{1}{\lambda_k}}\sigma_k Z_k \sim N\left(0, \frac{\sigma_k^2}{\lambda_k}\right)$$

を得る．文献 [1] の定理 3.38 から，

$$\begin{aligned}&\sqrt{n}(\bar{X}_{i\cdot} - \bar{X}_{k\cdot} - \mu_i + \mu_k)\\ &\xrightarrow{\mathcal{L}} \sqrt{\frac{1}{\lambda_i}}\sigma_i Z_i - \sqrt{\frac{1}{\lambda_k}}\sigma_k Z_k \sim N\left(0, \frac{\sigma_i^2\lambda_k + \sigma_k^2\lambda_i}{\lambda_i\lambda_k}\right)\end{aligned}$$

が分かる．また，

$$\sqrt{\tilde{\sigma_i}^2\frac{n}{n_i} + \tilde{\sigma_k}^2\frac{n}{n_k}} \xrightarrow{P} \sqrt{\frac{\sigma_i^2}{\lambda_i} + \frac{\sigma_k^2}{\lambda_k}} = \sqrt{\frac{\sigma_i^2\lambda_k + \sigma_k^2\lambda_i}{\lambda_i\lambda_k}}$$

とおく. スラツキーの定理を用いると，

$$\begin{aligned}&\frac{\bar{X}_{i\cdot} - \bar{X}_{k\cdot} - (\mu_i - \mu_k)}{\sqrt{\frac{\tilde{\sigma_i}^2}{n_i} + \frac{\tilde{\sigma_k}^2}{n_k}}}\\ &\xrightarrow{\mathcal{L}} \sqrt{\frac{\lambda_i\lambda_k}{\sigma_i^2\lambda_k + \sigma_k^2\lambda_i}}\left(\sqrt{\frac{1}{\lambda_i}}\sigma_i Z_i - \sqrt{\frac{1}{\lambda_k}}\sigma_k Z_k\right) \sim N(0, 1)\end{aligned}$$

となる．以上から，結論を得る． □

命題 4 $n \to \infty$ として，$V_i(\boldsymbol{\theta}) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, 1)$ が成り立つ．

証明 命題 2 より，

$$\sqrt{n}\left\{\log\tilde{\sigma_i}^2 - \log{\sigma_i}^2\right\} \xrightarrow{\mathcal{L}} \sqrt{\frac{2}{\lambda_i}}Z_i \sim N\left(0, \frac{2}{\lambda_i}\right)$$

$$\sqrt{n}\left\{\log\tilde{\sigma_k}^2 - \log{\sigma_k}^2\right\} \xrightarrow{\mathcal{L}} \sqrt{\frac{2}{\lambda_k}}Z_k \sim N\left(0, \frac{2}{\lambda_k}\right)$$

である．ここで，

$$\begin{aligned}&\sqrt{n}\left\{\log\tilde{\sigma_i}^2 - \log\tilde{\sigma_k}^2 - (\log\sigma_i^2 - \log\sigma_k^2)\right\}\\ &\xrightarrow{\mathcal{L}} \sqrt{\frac{2}{\lambda_i}}Z_i - \sqrt{\frac{2}{\lambda_k}}Z_k \sim N\left(0, \frac{2}{\lambda_i} + \frac{2}{\lambda_k}\right) \qquad (1)\end{aligned}$$

を得る．また，

$$\sqrt{2\left(\frac{n}{n_i} + \frac{n}{n_k}\right)} \xrightarrow{P} \sqrt{2\left(\frac{1}{\lambda_i} + \frac{1}{\lambda_k}\right)} \qquad (2)$$

を得る．(1),(2) とスラツキーの定理を適用することで，

$$V_i(\boldsymbol{\theta}) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{\sqrt{2\frac{\lambda_i+\lambda_k}{\lambda_i\lambda_k}}}\left(\sqrt{\frac{2}{\lambda_i}}Z_i - \sqrt{\frac{2}{\lambda_k}}Z_k\right) \sim N(0, 1)$$

を得る．ここで，結論を得る． □

ここで，

$$\tilde{U_i} \equiv \frac{\bar{X}_{i\cdot} - \bar{X}_{k\cdot}}{\sqrt{\frac{\sigma_i^2}{n_i} + \frac{\sigma_k^2}{n_k}}}$$

とおく．

補題 5 帰無仮説 H_i のもとで U_i, V_i はそれぞれ, $U_i \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, 1)$, $V_i \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, 1)$ である．

補題 6 $\tilde{U_i}$, V_i は互いに独立である．

$$W_{1i} \equiv \sqrt{\frac{\lambda_i\lambda_k}{\sigma_i^2(\lambda_i + \lambda_k)}}\left(\sqrt{\frac{1}{\lambda_i}}\sigma_i Z_i - \sqrt{\frac{1}{\lambda_k}}\sigma_i Z_k\right)$$

$$W_{2i} \equiv \frac{1}{\sqrt{2\frac{\lambda_i+\lambda_k}{\lambda_i\lambda_k}}}\left(\sqrt{\frac{2}{\lambda_i}}Z_i - \sqrt{\frac{2}{\lambda_k}}Z_k\right)$$

とおく．

補題 7 $\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$ を用いると，$\alpha U_i + \beta V_i \xrightarrow{\mathcal{L}} \alpha W_{1i} + \beta W_{2i}$ である．

証明

$$\tilde{U_i} = U_i \times \frac{\sqrt{\frac{\tilde{\sigma_i}^2}{n_i} + \frac{\tilde{\sigma_k}^2}{n_k}}}{\sqrt{\frac{\sigma_i^2}{n_i} + \frac{\sigma_k^2}{n_k}}}$$

であり，$\frac{\sqrt{\frac{\tilde{\sigma_i}^2}{n_i} + \frac{\tilde{\sigma_k}^2}{n_k}}}{\sqrt{\frac{\sigma_i^2}{n_i} + \frac{\sigma_k^2}{n_k}}} \xrightarrow{P} 1$ より，スラツキ—の定理を用いると，

$$\tilde{U_i} \xrightarrow{\mathcal{L}} W_{1i}$$

を得る．
命題 4 と補題 1 と定理 3.38 より，

$$\alpha\tilde{U_i}+\beta V_i \xrightarrow{\mathcal{L}} \alpha W_{1i}+\beta W_{2i}$$

が成り立つ．

$$\alpha(U_i-\tilde{U_i}) \xrightarrow{P} 0$$

であり，
スラツキ—の定理より，

$$\alpha(U_i-\tilde{U_i})+\alpha\tilde{U_i}+\beta V_i \xrightarrow{\mathcal{L}} \alpha W_{1i}+\beta W_{2i}$$

を得る．
ゆえに，

$$\alpha U_i+\beta V_i \xrightarrow{\mathcal{L}} \alpha W_{1i}+\beta W_{2i}$$

が成り立つ． □

4 漸近的な同時信頼区間

ここで，

$$B_i(\boldsymbol{\theta}) \equiv \left\{|U_i(\boldsymbol{\theta})| < z\left(\frac{1-\sqrt{1-\frac{\alpha}{k-1}}}{2}\right), |V_i(\boldsymbol{\theta})| < z\left(\frac{1-\sqrt{1-\frac{\alpha}{k-1}}}{2}\right)\right\}$$

とおくと，

$$\begin{aligned}&B_i(\boldsymbol{\theta})^c\\&=\left\{|U_i(\boldsymbol{\theta})| \geq z\left(\frac{1-\sqrt{1-\frac{\alpha}{k-1}}}{2}\right) \text{ または } |V_i(\boldsymbol{\theta})| \geq z\left(\frac{1-\sqrt{1-\frac{\alpha}{k-1}}}{2}\right)\right\}\end{aligned}$$

である．
$1 \leq i \leq k-1$ を満たす全ての i に対して，$\mu_i-\mu_k, \log{\sigma_i}^2-\log\sigma_k^2$ の漸近的な同時信頼区間を調べる．はじめに，定数 α $(0<\alpha<1)$ を定める．より，$U_i(\boldsymbol{\theta})$ と $V_i(\boldsymbol{\theta})$ は漸近的に独立であるので，

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty} P\left(B_i(\boldsymbol{\theta})\right)\\&=\lim_{n\to\infty} P\left(|U_i(\boldsymbol{\theta})| < z\left(\frac{1-\sqrt{1-\frac{\alpha}{k-1}}}{2}\right)\right)\\&\quad\times\lim_{n\to\infty} P\left(|V_i(\boldsymbol{\theta})| < z\left(\frac{1-\sqrt{1-\frac{\alpha}{k-1}}}{2}\right)\right)\\&=\left(1-2\times\frac{1-\sqrt{1-\frac{\alpha}{k-1}}}{2}\right)^2\\&=1-\frac{\alpha}{k-1}\end{aligned}$$

が成り立ち，

$$\lim_{n\to\infty} P\left(B_i(\boldsymbol{\theta})^c\right)=\frac{\alpha}{k-1} \tag{3}$$

を得る．

$$\begin{aligned}&\bigcap_{i=1}^{k-1} B_i(\boldsymbol{\theta})\\&=\Bigg\{i=1,\cdots,k-1 \text{ に対して}\\&|U_i(\boldsymbol{\theta})| < z\left(\frac{1-\sqrt{1-\frac{\alpha}{k-1}}}{2}\right), |V_i(\boldsymbol{\theta})| < z\left(\frac{1-\sqrt{1-\frac{\alpha}{k-1}}}{2}\right)\Bigg\}\\&=\Bigg\{i=1,\cdots,k-1 \text{ に対して}\\&\bar{X}_{i.}-\bar{X}_{k.}-\sqrt{\frac{\tilde{\sigma_i}^2}{n_i}+\frac{\tilde{\sigma_k}^2}{n_k}}z\left(\frac{1-\sqrt{1-\frac{\alpha}{k-1}}}{2}\right)\\&<\mu_i-\mu_k<\bar{X}_{i.}-\bar{X}_{k.}+\sqrt{\frac{\tilde{\sigma_i}^2}{n_i}+\frac{\tilde{\sigma_k}^2}{n_k}}z\left(\frac{1-\sqrt{1-\frac{\alpha}{k-1}}}{2}\right)\\&\text{かつ}\\&\log\tilde{\sigma_i}^2-\log\tilde{\sigma_k}^2-\sqrt{\frac{2}{n_i}+\frac{2}{n_k}}z\left(\frac{1-\sqrt{1-\frac{\alpha}{k-1}}}{2}\right)\\&<\log{\sigma_i}^2-\log{\sigma_k}^2\\&<\log\tilde{\sigma_i}^2-\log\tilde{\sigma_k}^2+\sqrt{\frac{2}{n_i}+\frac{2}{n_k}}z\left(\frac{1-\sqrt{1-\frac{\alpha}{k-1}}}{2}\right)\Bigg\}\end{aligned} \tag{4}$$

である．
(3) とボンフェローニの不等式を適用することで，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} P\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} B_i(\boldsymbol{\theta})\right)&=1-\lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{i=1}^{k-1} B_i(\boldsymbol{\theta})^c\right)\\&\geq 1-\sum_{i=1}^{k-1}\lim_{n\to\infty} P(B_i(\theta)^c)\\&=1-\alpha\end{aligned} \tag{5}$$

を導くことができる．(4), (5) より，$\{\mu_i-\mu_k,\ \log{\sigma_i}^2-\log{\sigma_k}^2|\ 1\leq i\leq k-1\}$ に対する信頼係数 $1-\alpha$ の同時信頼区間は，

$$\begin{aligned}&i=1,\cdots,k-1 \text{ に対して}\\&\bar{X}_{i.}-\bar{X}_{k.}-\sqrt{\frac{\tilde{\sigma_i}^2}{n_i}+\frac{\tilde{\sigma_k}^2}{n_k}}z\left(\frac{1-\sqrt{1-\frac{\alpha}{k-1}}}{2}\right)\\&<\mu_i-\mu_k<\bar{X}_{i.}-\bar{X}_{k.}+\sqrt{\frac{\tilde{\sigma_i}^2}{n_i}+\frac{\tilde{\sigma_k}^2}{n_k}}z\left(\frac{1-\sqrt{1-\frac{\alpha}{k-1}}}{2}\right)\\&\text{かつ}\log\tilde{\sigma_i}^2-\log\tilde{\sigma_k}^2-\sqrt{\frac{2}{n_i}+\frac{2}{n_k}}z\left(\frac{1-\sqrt{1-\frac{\alpha}{k-1}}}{2}\right)\\&<\log{\sigma_i}^2-\log{\sigma_k}^2\\&<\log\tilde{\sigma_i}^2-\log\tilde{\sigma_k}^2+\sqrt{\frac{2}{n_i}+\frac{2}{n_k}}z\left(\frac{1-\sqrt{1-\frac{\alpha}{k-1}}}{2}\right)\end{aligned}$$

である．

5 検定方式

{ 帰無仮説 H_i VS. 対立仮説 $H_i^A; 1 \le i \le k-1$} に対する水準 α の多重比較検定を考える.

$$B_i \equiv \left\{ |U_i| < z\left(\frac{1-\sqrt{1-\frac{\alpha}{k-1}}}{2}\right), |V_i| < z\left(\frac{1-\sqrt{1-\frac{\alpha}{k-1}}}{2}\right) \right\}$$

とおく. (5) より, 帰無仮説 $H_i; i = 1, \cdots, k-1$ のもとで,

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{i=1}^{k-1} {B_i}^c\right) \le \sum_{i=1}^{k-1} \lim_{n\to\infty} P({B_i}^c) = \alpha$$

を導くことができる. ここで, 水準 α の多重比較検定は次で与えられる.

$|U_i| > z\left(\frac{1-\sqrt{1-\frac{\alpha}{k-1}}}{2}\right)$ または $|V_i| > z\left(\frac{1-\sqrt{1-\frac{\alpha}{k-1}}}{2}\right)$ となる i に対して, H_i を棄却し, 対立仮説 H_i^A を受け入れ, $\mu_i \ne \mu_k$ または $\sigma_i^2 \ne \sigma_k^2$ と判定する.

6 プログラムの解説

6.1 プログラムの流れ

エクセルのデータを txt 形式に変換したものを用いる.

1. 関数 zalpha により $z\left(\frac{1-\sqrt{1-\frac{\alpha}{k-1}}}{2}\right)$ の値を得る
2. 関数 avarage により各群の標本平均を計算
3. 関数 ubvarience により各群の不偏分散を計算
4. 関数 suv により U_i と V_i を求める
5. 関数 sci により同時信頼区間を求める
6. 関数 stest により検定を行い結果を出力する

6.2 main プログラム

```
float main(void){
    zalpha();
    average();
    ubvarience();
    suv();
    sci();
    stest();}
```

7 C 言語プログラムと実際のデータによる解析結果

これまでに述べた検定方式を C 言語プログラムで作成した. これを用いて 1980 年から 2020 年までの観測地点の降雨量のデータを取り, 水準 $\alpha = 0.05$ とし 第 1 群を札幌, 第 2 群を東京, 第 3 群を鹿児島とし, 対照群を名古屋をとした解析を行った.

7.1 実行結果

```
水準を入力してください: 0.05
群の数を入力してください: 4
読み込むファイル名: bonferroni.txt
z((1-sqrt(1-(a)/(k-1)))/2) の値は 2.637
```

表 2 年間降水量 (mm)

観測地点	1980 , ··· , 2020
札幌	1178.5, ··· , 905.0
東京	1577.5, ··· , 1590.0
鹿児島	2942.0, ··· , 2977.5
名古屋	1727.0, ··· , 1711.0

```
第 1 群の標本平均は 1128.073 不偏分散は 32423.777
第 2 群の標本平均は 1556.378 不偏分散は 60120.742
第 3 群の標本平均は 2379.268 不偏分散は 301550.063
第 4 群の標本平均は 1567.329 不偏分散は 67786.703
統計量 U_1 の値は -8.885 V_1 の値は -2.361
統計量 U_2 の値は -0.196 V_2 の値は -0.384
統計量 U_3 の値は 8.555 V_3 の値は 4.779
z((1-sqrt(1-(a)/(k-1)))/2) の値は 2.637
同時信頼区間は
 i=1,...,k-1 に対して,
-569.617737 < μ_1-μ_4 < -308.894470 かつ
-1.561087<log σ_1^2-log σ_4^2<0.086139
-158.230286 < μ_2-μ_4 < 136.327942 かつ
-0.943624<log σ_2^2-log σ_4^2<0.703602
561.671570 < μ_3-μ_4 < 1062.206665 かつ
0.668957<log σ_3^2-log σ_4^2<2.316183
帰無仮説 H_1 を棄却する.
帰無仮説 H_2 を棄却しない.
帰無仮説 H_3 を棄却する.
```

7.2 考察

1980 年から 2020 年までの降水量のデータでは, 札幌と鹿児島では棄却することができた. 札幌と名古屋は, 平均に有意な差がある一方で, 分散にはなかった. 東京と名古屋は, 平均と分散どちらにも有意な差がなかった. また, 鹿児島と名古屋は平均と分散どちらも有意な差があった.

8 おわりに

本論文では, 多標本の正規分布モデルにおける平均と分散の同時相違検出のための統計的推測法について考察した. また C 言語プログラムを作成し, 実際に年間降水量のデータを用いることによって, 多標本の正規分布モデルの平均と分散の同時相違検出について理解を深めることができた.

参考文献

[1] 白石高章 :『統計科学の基礎—データと確率の結びつきがよくわかる数理』日本評論社, 東京, 2016

[2] 白石高章, 杉浦洋 :『多重比較法の理論と数値計算』共立出版, 東京, 2018

[3] 気象庁 : 過去の気象データ https://www.data.jma.go.jp/obd/stats/etrn/index.php 2021 年 12 月 18 日