中学校におけるクラス編成問題

2018SS019 飯沼竜哉

指導教員：佐々木美裕

1　はじめに

現在, 多くの中学校においてクラス編成は教務主任, 学年主任, クラス担任によって, 3 月ごろから手作業で行われている. クラス編成は, 1 年間変更ができないため慎重になる作業の 1 つである.

中学校では, 学習だけでなく班単位やクラス単位でのグループ活動によって人間性や生活力, 協調性を育てるための活動も多い. そのため, クラス編成においては成績だけでなく, リーダー適性やピアノの演奏能力, 運動能力のある生徒も重要となる. このほかに, 双子の生徒を同じクラスにしないなどさまざまな点を考慮しながらクラス編成を行っている.

本研究では, クラス編成作業の負担を軽減することを目的とし, ワークショップのチーム分け問題 [1] を参考にしクラス編成問題を考える. 大規模な問題に対する厳密解を求めることは困難であるため, 焼きなまし法を実装する.

2　問題の説明

生徒にはさまざまな個性がある. 例えば, 学力はあるが運動能力の低い生徒や, 学力と運動能力は低いがリーダー性がある生徒などがいる. 本研究では, このような生徒ごとの個性を「特性」と呼ぶ. クラス編成問題では, クラスごとの特性のばらつきが小さいほうが望ましい.

クラス編成をするうえで考慮するべき点として, クラス内の男女比がどのクラスでもほぼ同じであることや, 合唱祭のような行事のために, ピアノを演奏できる生徒が少なくとも 1 人以上クラスに属していなければならないことなどが挙げられる. また, 双子の生徒や, 生徒間の相性を考慮し, 特定の生徒同士を意図的に異なるクラスにしたり, 同じクラスしたりする必要がある.

このように, 考慮することが必要な生徒のクラス編成を操作するために, 考慮するグループ (ピアノを弾くことができる生徒, クラスを分ける生徒など) を作る. 例えば, 双子の生徒や生徒間の相性により意図的に異なるクラスにするという制約は, 考慮するグループに属している生徒の 1 人をあるクラスに割り当てた場合, そのクラスには, 同じグループに属している生徒を割り当てることができないという制約を入れることで実装する. また, 意図的に同じクラスにするという制約は, 考慮するグループに属している生徒が同じクラスに属しているかどうかの判定をし, グループの全員が同じクラスに属するという制約を入れることで実装する.

3　焼きなまし法

焼きなまし法とは, 金属加工の焼きなましを模した確率的探索アルゴリズムである. 焼きなまし法では, 初期温度と冷却スケジュールを決め, 指定された温度以下になるまで探索を繰り返す. 初期温度を高温に設定することで大域的な探索が可能となる. また, 暫定解の目的関数値が改善する場合は, 必ず改善方向に遷移する. 目的関数値が改悪する場合は, 高温であるほど改悪方向に解が遷移する確率が高くなり, 低温であるほど改悪方向に遷移する確率は低くなる. 焼きなまし法を用いることで, ある確率で改悪方向にも遷移するため, 局所最適解に陥らず大域的最適解を求めることがある.

4　定式化

以下のように記号を定義する.

I : 生徒の集合.

J : クラスの集合.

K : 特性の集合.

R : ピアノを弾くことができる生徒の集合.

M : 異なるクラスに編成するグループの添え字集合.

N : 同じクラスに編成するグループの添え字集合.

S_m : グループ $m \in M$ に属している生徒の集合.

P_n : グループ $n \in N$ に属している生徒の集合.

l_j : クラス $j \in J$ の定員.

q_j : クラス $j \in J$ の男子生徒の定員.

a_{ik} : 生徒 $i \in I$ が持つ特性 $k \in K$ の点数.

b_k : 特性 $k \in K$ の学年平均.

W : 大きな値.

$$d_i = \begin{cases} 1 : \text{生徒 } i \in I \text{ が男子生徒である.} \\ 0 : \text{上記以外.} \end{cases}$$

$$r_i = \begin{cases} 1 : \text{生徒 } i \in I \text{ はピアノを演奏できる.} \\ 0 : \text{上記以外.} \end{cases}$$

$$t_{im} = \begin{cases} 1 : \text{生徒 } i \in I \text{ が異なるクラスに編成するグループ} \\ \quad m \in M \text{ に属する.} \\ 0 : \text{上記以外.} \end{cases}$$

$$u_{in} = \begin{cases} 1 : \text{生徒 } i \in I \text{ が同じクラスに編成するグループ} \\ \quad n \in N \text{ に属する.} \\ 0 : \text{上記以外.} \end{cases}$$

次に, 以下のように変数を定義する.

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 : \text{生徒 } i \in I \text{ をクラス } j \in J \text{ に割り当てる.} \\ 0 : \text{上記以外.} \end{cases}$$

y_{jk}：クラス $j \in J$ における特性 $k \in K$ の平均.
z_k：特性 $k \in K$ におけるクラス平均と学年平均の差の最大値.

$$\alpha_{jn} = \begin{cases} 1 : P_n(n \in N) \text{ に属している生徒全員がクラス } j \in J \text{ に属する.} \\ 0 : \text{上記以外.} \end{cases}$$

以上の記号を用いて, クラス編成問題を以下のように定式化する.

$$\begin{aligned}
\text{min.} \quad & \sum_{k \in K} z_k & & (1) \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j \in J} x_{ij} = 1, & i \in I \quad & (2) \\
& \sum_{i \in I} x_{ij} = l_j, & j \in J \quad & (3) \\
& \sum_{i \in I} d_i x_{ij} = q_j, & j \in J \quad & (4) \\
& \frac{1}{l_j} \sum_{i \in I} a_{ik} x_{ij} = y_{jk}, & j \in J, k \in K \quad & (5) \\
& y_{jk} - b_k \leq z_k, & j \in J, k \in K \quad & (6) \\
& y_{jk} - b_k \geq -z_k, & j \in J, k \in K \quad & (7) \\
& \sum_{i \in I} r_i x_{ij} \geq 1, & j \in J \quad & (8) \\
& \sum_{i \in I} t_{im} x_{ij} \leq 1, & j \in J, m \in M \quad & (9) \\
& \sum_{i \in I} u_{in} x_{ij} \geq 2\alpha_{jn}, & j \in J, n \in N \quad & (10) \\
& \sum_{i \in I} u_{in} x_{ij} \leq W\alpha_{jn}, & j \in J, n \in N \quad & (11) \\
& x_{ij} \in \{0, 1\}, & i \in I, j \in J \quad & (12) \\
& \alpha_{jn} \in \{0, 1\}, & j \in J, n \in N \quad & (13)
\end{aligned}$$

目的 (1) は, 特性 $k \in K$ について, クラス $j \in J$ の平均と学年平均の差のうち最大なもの z_k の総和を最小化することを示す. (2) は, 生徒 $i \in I$ はクラス $j \in J$ のうち 1 つに属することを示す制約である. (3) は, クラス $j \in J$ に属する生徒 $i \in I$ の人数は l_j であることを示す制約である. (4) は, クラス $j \in J$ に属する男子生徒 $i \in I$ の人数は q_j であることを示す制約である. (5) は, クラス $j \in J$ における特性 $k \in K$ の平均は y_{jk} であることを示す制約である. (6)(7) は, 特性 $k \in K$ についてクラス $j \in J$ の平均と学年平均の差は z_k 以下であることを示す制約である. (8) は, クラス $j \in J$ に属する生徒 $i \in I$ のうち, ピアノの演奏ができる生徒が 1 人以上であることを示す制約である. (9) は, グループ $m \in M$ に属する生徒は異なるクラスに属することを示す制約である. (10)(11) は, グループ $n \in N$ に属する生徒は全員が同じクラスに属することを示す制約である. (12) は, x_{ij} のバイナリ制約である. (13) は, α_{jn} のバイナリ制約である.

表 1　80 人を 3 クラスに分ける問題例 (厳密解)

クラス	学力	運動能力	リーダー性
1 組	281.62	3.04	3.23
2 組	281.63	3.04	3.26
3 組	281.63	3.07	3.22

表 2　240 人を 8 クラスに分ける問題例 (近似解)

クラス	学力	運動能力	リーダー性
1 組	290.50	3.20	3.10
2 組	249.87	2.93	3.00
3 組	250.30	2.93	2.83
4 組	290.90	2.43	3.00
5 組	277.60	3.10	2.90
6 組	269.23	3.13	3.20
7 組	241.33	2.77	2.43
8 組	266.83	3.30	3.03

5　計算実験

計算環境は (プロセッサ:Intel(R)Core(TM) i7-8700 CPU @ 3.20GHz 3.19GHz 実装メモリ: 32GB) である. 生徒の特性は, 学力, 運動能力, リーダー性の 3 つとした. 80 人を 3 クラスに分ける問題例と 240 人を 8 クラスに分ける問題例を作成した. 前者については, Gurobi Optimizer 9.1.0 を用いて厳密解を求め, 後者については, Python で実装した焼きなまし法を用いて近似解を求めた. それぞれの結果を表 1 と表 2 に示す.

厳密解法では 80 人を 3 クラスに分ける問題例で計算実験を行った. 割り当てられたクラスにおける各特性の平均は, 表 1 のようになった. 特性の平均の差は大きくても 0.04 であり, 約 2 秒でばらつきの小さいクラス編成が実現できた.

近似解法では 240 人を 8 クラスに分ける問題例で計算実験を行った. 割り当てられたクラスにおける各特性の平均は, 表 2 のようになった. 厳密解法と比較すると, 特性の平均の差は大きいが, 約 45 分でクラス編成ができた.

6　おわりに

厳密解法と近似解法の両方でクラス編成を行うことができた. 厳密解法では問題の規模が大きくなると計算に時間がかかりすぎてしまうため, 焼きなまし法を用いることで計算時間を大幅に改善し大規模な問題でもクラス編成を行うことが可能となった.

参考文献

[1] 斎藤努. 組み合わせ最適化でチーム分けする. https://qiita.com/SaitoTsutomu/items/f4478dfbc3c1cf6425e3. 2021 年 7 月 1 日閲覧.