スマリヤンの論理パズルにおける解法の比較
ー真理値表およびタブローによる解法を中心としてー

2018SS074 山本健太
指導教員：佐々木克巳

1　はじめに

本研究の目的は，[3-6]の論理パズルを，真理値表およびタブローによる解法で解き，それらを比較することで，適切な解法を考察することである．具体的には，[3-6]の問題のうち 9 題を 2 つの解法で解き，両者を効率性やわかりやすさなどから比較する．本稿では，2 節で 2 つの解法とそれらの比較の結果を示し，3 節と 4 節で 9 題のうちの 1 題の解を紹介する．3 節で論理パズルの概要を示し，4 節で具体的問題と解を示す．

2　2 つの解法

この節では，真理値表およびタブローを用いた解法とそれらを比較した結果を示す．本稿では，2 つの文 P, Q に対し，「P または Q」を P∨Q,「P と Q が同値」を P≡Q,「P でない」を￢P と表し，「矛盾」を⊥，2 つの真理値「真」,「偽」をそれぞれ T, F と表す．

真理値表を用いた解法は，真理値を求める文や正しいとわかっている文の真理値表をかき，正しいとわかっている文が真となる行から解を求める方法である．

タブローを用いた解法は以下のとおりである．

定義 2.1. 文の有限集合 S に対して，S のタブローを次のように定義する．
(1) S の要素を，縦に並べた図は S のタブローである．
(2) S のタブローT とその 1 つの枝を θ とする．
(2.1) θ に現れる文から文 P が導かれるとき，T の θ の 下に P を書き加えてできる図は，S のタブローである．
(2.2) θ に文 P∨Q が現れるとき，T の θ の下に P　Q を書き加えてできる図は，S のタブローである．

性質 2.2. S は正しい文の集合，T は S のタブローとする．T において，⊥の現れないすべての枝に現れる文は，どれも正しい．特に，⊥の現れない枝がちょうど 1 つだけあるとき，その枝に現れる文はすべて正しい．

タブローによる解法：問題文などから明らかに正しいとわかる文の集合に，定義 2.1(2)の操作を，次の条件を満たすまで適用したタブローT をつくり，(条件)の「解を導く文」から解を導く方法．
(条件) T の⊥の現れないどの枝にも解を導く文が現れる．

本研究で扱った 9 題について 2 つの解を比較した結果，真理値表の作成においては，各行の基準と，表の列に組み込む条件は，「正しいと分かっている文」から決めるとうまくいくことが分かった．行と列が決まれば，表の真理値の計算は機械的に進められるが，すべての場合の真理値を計算する必要がある．一方，タブローの作成は，⊥が現れた枝についてはそれ以降は計算不要なので，適切に推論を選択して⊥を導くことで，計算を減らすことができる．「正しいと分かっている文」もその状況に応じて利用できる．ともなって，タブローの枝の数は，真理値表の行数と同じか少なくすることが可能である．

また，真理値表では，矛盾していない行の条件から，解を即座に導けるが．タブローの⊥の現れない枝から解を導くには，その枝から解を探す必要がある．

さらに，真理値表では，その欄がすべて埋まっていることから，矛盾するすべての場所を把握できる．問題の条件が矛盾している場合は，[1]で述べられているように，すべての行に矛盾があることからそのことを把握できる．一方．タブローでは⊥の現れる枝はそれ以降は推論を続ける必要はないことから，把握できる矛盾の場所は，解を導くのに最小の部分である．矛盾しない枝が 1 つだけになったとき，問題の条件が矛盾しないことを前提に解を導くことが多いので，問題の条件が矛盾しているときはそのことをを把握しにくい(表 2.1 参照)．

表 2.1：真理値表とタブローの比較

	真理値表	タブロー
表・図の作成	機械的に進めることができる．	推論を適切に選ぶ必要がある．
表・図の大きさ	各行の基準 n により，行数は 2^n．	枝の数を左の 2^n 以下にできる．
表・図からの解の導きやすさ	解を即座に導くことができる．	図から解を探す必要がある．
把握できる矛盾の場所	すべての場所を把握できる．	解を導くための最小の部分．

3　論理パズルの概要

この節では，本稿で扱う論理パズルの概要を示す．そのパズルには次の前提条件がある．

条件 3.1
(1) 島の住民はすべて，騎士か悪漢のいずれかである．
(2) 騎士は，常に正しいことを答える．
(3) 悪漢は，常に偽のことを答える．
(4) 島の住民は，赤札と黒札の 2 枚の札を携帯している．

(5) その札の一方は「はい」を意味し, もう一方は「いいえ」を意味する.
(6) 「はい」か「いいえ」で答えられる質問をすると, 住民はその 2 枚の札のうち 1 枚を見せる.

以後, 島の住民 X に対して, 「X は騎士」を K(X)と表し, 「赤札の意味は『はい』である」を R と表す. 条件 3.1 より, 次の性質が導かれる. この性質は, 前節の真理値表による解法の「正しいとわかっている文」の例になる.

性質 3.2([1]). 島の住民 X が質問 P に赤札で答えたとき, (K(X)≡R)≡P が成り立つ.

4 具体例

この節では, [5]の一部の条件を変えた問題に対して真理値表とタブローによる解を与え, 両者を比較する.

問題 1([5]の改題). 被告が裁判にかけられている. 目撃者 A, B, C は島の住民だが, 裁判官(騎士)はほかの島から来たので, 札がどちらを意味するのかを知らない. 裁判官は最初に「被告は無実か」と質問すると, A は赤札で答えた. さらに「B と C は同種か」と質問すると, A は黒札で答えた. 次に B に「被告は無実か」と質問をすると, B は黒札で答えた. 続けて「A と C はともに悪漢か」と質問すると, B は赤札で答えた. 最後に裁判官は C に「この質問に赤札で答えるか」と質問すると, C は赤札で答えた. さて, 被告は無実か, 有罪か？

以下では,
I :被告は無実である.
P_C :「裁判官の最後の質問に C が赤札で答える」
とおく. すると, 性質 3.2 より, 次の同値性が成り立つ.
1) (K(A)≡R)≡I
2) (K(A)≡¬R)≡「B と C は同種」
3) (K(B)≡¬R)≡I
4) (K(B)≡R)≡「¬K(A)かつ¬K(C)」
5) (K(C)≡R)≡P_C
また, C は実際に赤札で答えているので, P_C は真である.

真理値表による解:5)と P_C から K(C)≡R が成り立つので, 問題 1 の真理値表は, 表 4.1 のようになる(K(C)と R は同じ真理値をとる). 表 4.1 において, 1), 2), 3), 4)の同値性がすべて真となるのは 5 行目のみである. この 5 行目で I は T だから, 被告は無実となる.

タブローによる解:問題 1 のタブローは, 図 4.1 のようになる(図 4.1 の各文の右のカッコの番号は, その番号の文が根拠になることを表す. 24〜32 および 33〜34 の根拠は, 13〜21 と同様であり, 省略している). 図 4.1 より, ⊥が現れない枝は 12 を含む枝である. したがって, 12 を含む枝に現れる文はすべて正しい. よってタブローの 5 より, 被告は無実である.

表 4.1:問題 1 の真理値表

K(A)	K(B)	K(C)	R	I	1)	2)	3)	4)
T	T	T	T	T	T	F	F	F
T	T	T	T	F	F	F	T	F
T	T	F	F	T	F	F	T	T
T	T	F	F	F	T	F	F	T
T	F	T	T	T	T	T	T	T
T	F	T	T	F	F	T	F	T
T	F	F	F	T	F	T	F	F
T	F	F	F	F	T	T	T	F
F	T	T	T	T	F	T	F	F
F	T	T	T	F	T	T	T	F
F	T	F	F	T	T	T	T	F
F	T	F	F	F	F	T	F	F
F	F	T	T	T	F	F	T	T
F	F	T	T	F	T	F	F	T
F	F	F	F	T	T	F	F	T
F	F	F	F	F	F	F	T	T

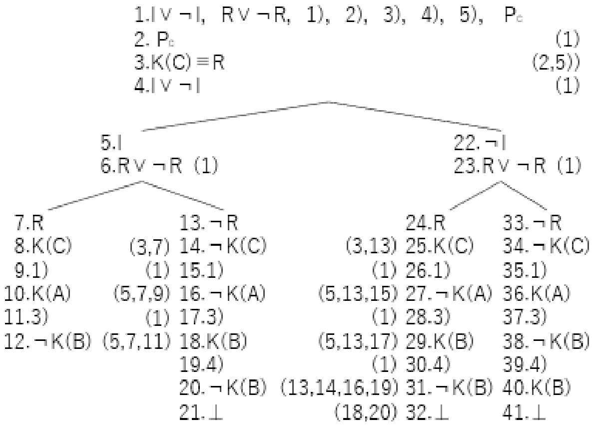

図 4.1:問題 1 のタブロー

5 おわりに

論理パズルを真理値表とタブローの 2 通りで解くことで, それぞれのよさや, 最適な解き方など, 2 節で述べたようにまとめることができた.

参考文献

[1] 伊勢田祥平, 「真理値表とロジカル・ラビリンス」, 南山大学 2009 年度卒業論文.
[2] 松原隆太郎, 「論理パズルにおけるタブローと真理値表による解法の比較」, 南山大学 2019 年度卒業論文.
[3] 佐々木克巳, 2020 年度「システム数理演習Ⅲ」講義資料, 南山大学, 2020.
[4] Raymond Smullyan, 『スマリヤンの無限の論理パズル―ゲーデルとカントールをめぐる難問奇問』, 白揚社, 東京, 2007.
[5] Raymond Smullyan, 『スマリヤン 記号論理学 一般化と記号化』, 丸善出版, 東京, 2013.
[6] Raymond Smullyan, 『この本の名は?: 嘘つきと正直者をめぐる不思議な論理パズル』, 日本評論社, 東京, 2013.