高等学校数学における問題の統合的・発展的考察
―思考力の育成を中心として―

2018SS048 新美綾香
指導教員：佐々木克巳

1　はじめに

本研究の目的は，高等学校の数学教育において思考力を育成するための問題を統合的・発展的に考察することである．思考力を育成するための問題は[1], [2]で扱われており，本研究では， それらの問題をより統合的･発展的に考察することで, 思考力についての理解を深める．そして，これらの力を育成するための授業を構成するための手がかりとしたい．

本研究の動機は，大学入学共通テストで，これまでの大学入試センター試験に代わり，思考力・判断力・表現力等を中心に評価されるため，それらの深い理解の必要性を感じたからである([3])．

具体的に扱う問題は8題で, そのうちの5題を[1], [2]から抽出している．それらは，その考察の方法より，次の 3 つに分類される．

・複数解を求め，それぞれを比較して理解を深める問題
・似ている問題を比較して理解を深める問題
・公式や定義を再確認する問題

本稿では，この 2 つ目の発展的考察を示す．

2　似ている問題を比較して理解を深める問題

この節では，複数のモノを複数のグループに分ける分け方の総数を求める問題を考察する．この問題は,

・モノに区別があるか
・グループに区別があるか
・空グループを認めるか

で 8 種類に分けられる．本研究では，この 8 種類の問題の 3 種類の解法

解 1．書き出す解
解 2．同じものを含む順列の公式を用いた解
解 3．重複順列の公式を用いた解

を比較する．

具体的な問題は，次の 2 題である．

問 2.1. 8 個のリンゴを次の(1)～(4)のように分ける分け方は, それぞれ何通りあるか. ただし，リンゴは区別がつかないものとする．

(1)([2]) 3 人で分ける(もらわない人がいてもよい)
(2)3 人で分ける(もらわない人はいない)
(3)3 組に分ける(0 個の組があってもよい)
(4)3 組に分ける(0 個の組はない)

問 2.2．6 人を次の(1)～(4)のように分ける分け方は，それぞれ何通りあるか．

(1)3 部屋 A，B，C に分ける(空室はあってよい)
(2)3 部屋 A，B，C に分ける(空室はない)
(3)3 グループに分ける(0 人のグループはあってよい)
(4)3 グループに分ける(0 人のグループはない)

上の問題の種類と適用できる解は表 2.1 のとおりである．

表 2.1：8 種類の問題の比較

		問2.1				問2.2			
		(1)	(2)	(3)	(4)	(1)	(2)	(3)	(4)
区別	モノ	無				有			
	グループ	有		無		有		無	
空グループ		可	不可	可	不可	可	不可	可	不可
解1		〇	〇	〇	〇	〇	〇	〇	〇
解2		〇	〇			×	×	×	×
解3		×	×	×	×	〇	〇	〇	〇

表 2.1 の×の部分は，その解法を適用しにくいということである．また，×のない部分の解は次の関係がある．

・問題 2.1(1)～(4)の解 1 は互いに利用できる．
・問題 2.1(1)～(4)の解 2 には，上のような関係はない．
・問題 2.2(1)～(4)の解 1 は互いに利用できる．
・問題 2.2(1)～(4)の解 3 は互いに利用できる．

以下に具体的な解法と，上の関係の詳細を述べる．問題 2.1(1)の解 2 が[2]の解と本質的に同じである．

まず，問題 2.1 の解 1 について述べる．

(1)の解 1. 次の(i), (ii)より, 15＋30＝45 通りである．

(i) 3 人がもらったリンゴの個数が互いに異なるとき，その個数のパターンは,

$$(7,1,0),(6,2,0),(5,3,0),(5,2,1),(4,3,1)$$

の 5 通りだから，3!×5=30 通りである．

(ii) 2 人がもらったリンゴの個数は同じだが，他の 1 人とは異なるとき，その個数のパターンは,

$$(8,0,0),(6,1,1),(4,4,0),(4,2,2),(3,3,2)$$

の 5 通りだから，(3!/2!)×5＝15 通りである．

(2)の解 1. (1)の解 1(i)のとき, その個数のパターンは,

$$(5,2,1),(4,3,1)$$

の 2 通りで，(1)の解 1(ii)のパターンは,

$$(6,1,1),(4,2,2),(3,3,2)$$

の 3 通りだから，3!×2＋(3!/2!)×3=21 通りである．

(3)の解 1．3 組に分ける方法は,

$$(8,0,0),(7,1,0),(6,2,0),(6,1,1),(5,3,0),$$
$$(5,2,1),(4,4,0),(4,3,1),(4,2,2),(3,3,2)$$

の 10 通りである．

(4)の解 1．(3)より，

$$(6,1,1),(5,1,2),(4,3,1),(4,2,2),(3,3,2)$$

の 5 通りである．

(1)～(4)の関係は次の通りである．

・(1)の解は，(3)の解を経由しているので，(1)の解から(3)の解を抽出できる．逆に，(3)の「3 組に分け

る方法」を(1)の(i)と(ii)に分けて考えると(1)の解を導くことができる．
・(2)の解は，(1)の解を制限して得られ，逆に(2)の解に「もらわない人がいる場合」を追加すれば(1)の解を導くことができる．
・(4)の解と(3)の解の関係も，(2)の解と(1)の解の関係と同様である．

問題 2.1 の解 2 について述べる．
(1)の解 2．リンゴの分け方の個数は，

○○○○○○○○｜｜

の同じものを含む順列の総数と同じであり，
10!/(2!×8!)= 45通りである．
(2)の解 2. 事前に 3 人に 1 ずつリンゴを配っておき，残った 5 個のリンゴを分配すればよいので(1)と同様にして，7!/(5!×2!)= 21通りである．

(1)〜(4)の関係は次のとおりである．
・(2)の解は，(1)の解を利用しているわけではない．(1)の解も(2)の解を利用しているわけではない．解 1 のような(1)と(2)の関係はないと考える．
・(3)で，(1)の結果を利用しようとすると，結局，(1)の(i)，(ii)の場合分けが必要となり，解 1 と本質的に同じになってしまう．(4)も同様である．

問 2.2 の解 1 について述べる．
(1)の解 1．6 人を 3 つの部屋 A，B，C に分ける各分け方に対して，その総数を求める．
(a)6 人，0 人，0 人：${}_6C_6$=3
(b)5 人，1 人，0 人：${}_6C_5$× ${}_1C_1$×3!=36
(c)4 人，2 人，0 人：${}_6C_4$× ${}_2C_2$×3!=90
(d)4 人，1 人，1 人：${}_6C_4$× ${}_2C_1$× ${}_1C_1$×3＝90
(e)3 人，3 人，0 人：${}_6C_3$× ${}_3C_3$×3=60
(f)3 人，2 人，1 人：${}_6C_3$× ${}_3C_2$× ${}_1C_1$×3!＝360
(g)2 人，2 人，2 人：${}_6C_2$× ${}_4C_2$× ${}_2C_2$=90
よって，3+36+90+90+60+360+90=729 通りである．
(2)の解 1．(1)の解の(d)，(f)，(g)の和をとればよいので，90+360+90=540 通りである．
(3)の解 1．(1)の解 1 の各場合について，その組み合わせをとればよいので，1+6+15+15+10+60+15=122 通りである．
(4)の解 1．(2)の解 1 の(d)，(f)，(g)の各場合の組合せをとればよいので，15+60+15=90 通りである．

(1)〜(4)の関係は次の通りである．
・(2)の解は，(1)の解 1 の 3 つの場合を利用して解くことができる．また，(2)の解を先に求めても分け方を追加することで(1)の解を導くことができる．
・(3)の解は，(1)の解の各場合に対して組み合せをとればよい．ただし，(a)の場合には 2 つの 0 人のグループに区別がないので，注意が必要である．(3)の解から(1)の解も，同様の場合分けで導くことができる．
・(4)の解と(2)の解の関係も，(3)の解と(1)の解の関係と本質的に同じであるが，(a)の場合がないので，その場合の注意は不要である．
・(3)の解と(4)の解の関係も，(1)と(2)の関係と同様に捉えることもできる．

問 2.2 の解 3 について述べる．
(1)の解 3．各人が 3 通りの部屋を選べるので，3^6＝729 通りである．
(2)の解 3．(1)より，3 部屋に 6 人を入れる方法は3^6通りである．このうち，空室が 2 部屋できる場合は，3 通りである．また，空室が 1 部屋できる場合は，空室になる部屋が 3 通りあり，その他の 2 部屋に 6 人を入れる方法が，2^6-2 通りずつあるので$3+3(2^6-2)$通りである．よって，$3^6-\{3+3(2^6-2)\}=729-\{3+3(64-2)\}=729-(3+186)=540$通りである．
(3)の解 3．0 人のグループが 2 つできる場合が，1 通りである．0 人のグループが 1 つ以下の場合は，各方法に対して，そのグループを 3 部屋 A，B，C に分ける方法が 3!通りある．6 人を 3 部屋 A，B，C に入れる方法は(空室は 1 つ以下)は(1)より，3^6-3通りなので，この場合の方法は，
$(3^6-3)\div 3!=(3^5-1)\div 2=121$ 通りである．よって，1+121=122 通りである．
(4)の解 3．(3)の解 3 と同様に考えて，(2)の結果を 3!で割ればよい．よって，540÷3!=90 通りである．

(1)〜(4)の関係は次の通りである．
・(2)の解は，(1)の解を経由している．ただし，グループの人数の場合分けが必要となる．
・(3)は，0 人のグループが 2 つできる場合とそうでない場合を分けて考えると，(1)の解と互いに利用できる．
・(2)と(4)も，(1)と(3)の関係と同様であるが，0 人のグループはないので，そのための場合分けは不要である．

3 おわりに

2 節の 8 種類の問題では，3 つの解法を考察した．これらは，似ている問題だがその種類ごとにある解法が適用できたり，できなかったりする．その場合，どうして似ている問題なのに同じ解法では解けないのか，どうしたら同じように解くことはできるのか，などを考えながら，それぞれの解法の特徴をまとめた．このような過程を通して，解の特徴を理解することで，思考力を身に着けることができると考える．

参考文献

[1]河合塾数学科，『これからの大学入試に必要な数学の「思考力」を鍛える問題集』，河合出版株式会社，東京，2018.
[2]吉田信夫，『ほぼ計算不要の思考力・判断力・表現力トレーニング　数学 1A』，東京出版，東京，2018.
[3]「大学入学共通テスト実施方針策定に当たっての考え方」，https://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/chousa/shotou/134/shiryo/__icsFiles/afieldfile/2017/09/13/1395611_12.pdf（参照 2021.12.28）