

身の回りの事象を数学教育に生かす方法の考察

2018SS028 笠木 健伸

指導教員：佐々木 克巳

1 はじめに

本研究の目的は、身の回りの事象と数学の繋がりから、生徒の学習意欲を高めるための指導法を考察することである。具体的には、中学校 2 年生の「一次関数」、「折れ線グラフ」、「場合の数と確率」、中学校 3 年生の「相似と図形」について、それぞれ、模擬店の利益、出会う時刻と位置、くじ引きの参加比較に関連付けて考察した。本稿では、2 節で中学校 2 年生の「折れ線グラフ」について出会う時刻と位置と関連付けた考察を行う。

2 折れ線グラフ

この節では、折れ線グラフに関する問題を、授業で扱う順番を意識して、次の順に述べる。

- (1)対象とする問題
 - (2)解法の考察
 - (3)指導上の留意点
 - (4)応用問題
 - (5)応用問題の解法の考察
 - (6)応用問題の授業構想と指導上の留意点
- (1)の問題は[1]を参考に作成し、(4)は(1)の類題で、(1)の考え方とよさを生かせる問題である。

(1) 対象とする問題: 次の問題 2.1 を考える。
問題 2.1. A 君は家から 12km 離れた駅に歩いて向かい、B 君はその駅から A 君の家に向かって歩きました。A 君ははじめの 4km は進むのに 50 分かかり、その後 40 分間休憩した後、残りの 8km を 120 分間で移動しました。B 君は、A 君が出発したのと同時に駅を出発し、A 君の家まで 240 分で移動します。A 君と B 君が出会うのは何分後か求めなさい。ただし、 x 分後の A 君の家からの距離を y km とします。

(2)解法の考察: グラフを用いる解(解 1)と用いない解(解 2)の概要を示す。
解 1: A 君のグラフは図 2.1 の折れ線、B 君のグラフは図 2.1 の直線 ℓ のようになる。ただし、 ℓ が線分 QR と交わるかどうかは分からないことに注意する。

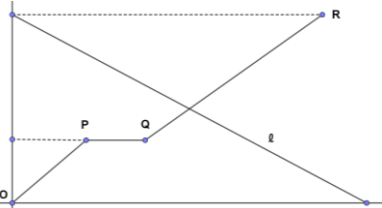


図 2.1 : A 君と B 君のグラフの概形

問題の条件により、P, Q の座標、OP, QR, ℓ の方程式を求めることができ、A 君と B 君のグラフは図 2.2 のようになる。グラフより A 君と B 君は A 君の休憩後に会えることがわかるので、QR と ℓ の方程式から、 $x = 120$ 、つまり、120 分後に会える。

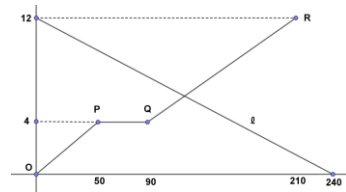


図 2.2 : A 君と B 君のグラフ

解 2: 問題文から、 x 分後の A 君の家と B 君の距離 $f(x)$ を求める。そして次の 3 つの場合を考える。

- (i) 休憩前つまり $0 \leq x \leq 50$ の範囲で出会う場合
 - (ii) 休憩中つまり $50 \leq x \leq 90$ の範囲で出会う場合
 - (iii) 休憩後つまり $90 \leq x \leq 210$ の範囲で出会う場合
- 3 つの各場合について、A 君の家と A 君の距離の式 $g(x)$ を求め、 $f(x) = g(x)$ を満たす x が、各場合の x の範囲に存在するか調べる。結果、(iii) の場合のみ存在して、その x は $x = 120$ である。よって、120 分後に会える。

上の 2 つの解を比較する。
・解 1 の方が、全体の状況を把握しやすい。
・解 2 では、3 つの場合で方程式を解く必要があるが、解 1 では、1 つでよい。

- (3)指導上の留意点:
- ・(2)の 2 つの解を比較することで、(2)で述べたグラフのよさを伝えられると考える。
 - ・(2)の解 1 では最初にグラフの概形を書く必要があるため、このような問題文からグラフの概形を予想する訓練が必要と考える。

(4)応用問題: 次の問題を考える。
問題 2.2([2]). 列車は常に一定の速さとする。10:00 に B 駅を出た列車は 10:20 に A 駅に着き、すぐ折り返して B 駅に 10:40 に着く。太郎君が 10:04 に A 駅を出て線路沿いの道を A 駅から B 駅に向かって分速 200m の自転車で行く。途中 B 駅からくる列車と 10:16 にすれ違い、そのあと A 駅で折り返してきた列車に追い抜かれた。
(ア)太郎君がはじめて列車とすれ違ったのは、A 駅から何 m 離れた地点か答えなさい。
(イ)太郎君が列車に追い抜かれた時刻を求めなさい。

(5)応用問題の解法の考察:(2)と同様の 2 つの解を考える。2 つの解の概要を以下に示す。2 解の比較は、(2)と同様であり、本稿では省略する。
解 1 : 太郎君と列車のそれぞれに対して、10:00 から x 分後の、A 駅との距離 y のグラフは図 2.3 のようになる。右上りの直線が太郎君の、折れ線グラフが列車のグラフである。
(ア)問題文から、PQ の方程式を求めると、 $y = 200x - 800$ であり、これに $x = 16$ を代入して、P の y 座標 2400 と解 2400m を得る。

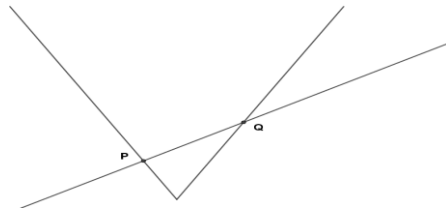


図 2.3：太郎君と列車のグラフの概形

(イ)(ア)で求めた座標と問題文から、折れ線の右下がりの部分、右上がりの部分の方程式は、それぞれ、 $y = -600x + 12000, y = 600x - 12000$ である。(ア)の方程式を用いて、交点 Q の x 座標 $x = 28$ と解 10:28 を得る。

解 2：(ア)10:00 から x 分後に、太郎君が A 駅から y m 離れた地点にいるとする。問題文から $y = 200x - 800$ であり、これに $x = 16$ を代入して $y = 2400$ と解 2400m を得る。

(イ)10:00 から x 分後に、列車が A 駅から y m 離れた地点にいるとする。(ア)の結果と問題文から列車の速度を求め、さらに列車の到着時刻などから、 x, y は、
折り返し前： $y = -600x + 12000$
折り返し後： $y = 600x - 12000$
を満たす。折り返し後の式と(ア)の式との連立方程式を解いて、 $x = 28$ と解 10:28 を得る。

(6)応用問題の授業構想と指導上の留意点:(5)の 2 つの解をふまえ、次の 2 つの授業構想を考える。

授業構想 1. 問題文の情報から立式しそのグラフを利用して解を導く。

授業構想 2. グラフの概形を把握して、それを利用して立式し解を導く。

どちらもグラフを用いる構想で、前者は、解 2 にグラフの利用を加えることでよりわかりやすく解を導く構想、後者は、解 1 をもとにした構想である。以下に具体的に示す。

授業構想 1.

第 1 段階. 問題に適したグラフを作成するためには何が必要か考えさせる。

- ・太郎君の式と列車(B 駅から A 駅)の式と列車(A 駅から B 駅)の式

第 2 段階. わかっている情報をまとめ立式する。具体的には以下を用いて立式する。

(立式 1) 太郎君の式 $y = a_1x + b_1$

- ・分速 200m である $\Rightarrow |a_1| = 200$ である
- ・A 駅から B 駅へ向かう $\Rightarrow a_1 > 0$
- ・A 駅を 10:04 に出発する $\Rightarrow (x, y) = (4, 0)$ が $y = a_1x + b_1$ を満たす

(立式 2) 列車(B 駅から A 駅)の式 $y = a_2x + b_2$

- ・20 分後に A 駅に着く $\Rightarrow (x, y) = (20, 0)$ が $y = a_2x + b_2$ を満たす
- ・10:16 に太郎君とすれ違う $\Rightarrow x = 16$ のとき $a_2x + b_2 = a_1x + b_1$
- ・B 駅から A 駅へ向かう $\Rightarrow a_2 < 0$

(立式 3) 列車(A 駅から B 駅)の式 $y = a_3x + b_3$

- ・20 分後に A 駅に着く $\Rightarrow (x, y) = (20, 0)$ が $y = a_3x + b_3$ を満たす

- ・同じ列車で A 駅から B 駅へ向かう $\Rightarrow a_3 = -a_2$

立式の結果は (5) の解 2 のとおりである。

第 3 段階. 第 2 段階の 3 式からグラフを作成すると図 2.4 のようになる。

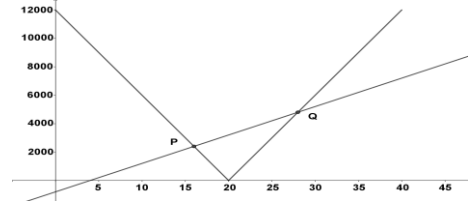


図 2.4：太郎君と列車のグラフ

第 4 段階. 2 つの交点 P, Q の意味を考えさせる。

P：太郎君が列車とはじめてすれ違う

Q：太郎君が列車に追い抜かれる

第 5 段階. 応用問題の解を導く。

授業構想 2.

第 1 段階. 問題文からどのようなグラフになるか考えさせる。グラフの概形は図 2.3 のようになる。

第 2 段階. 問題文の情報をグラフに記入してもらう。たとえば、図 2.5 のようになる。

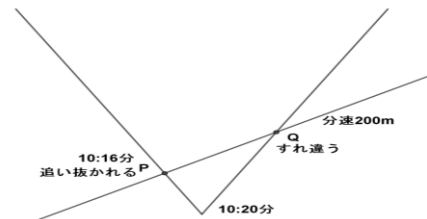


図 2.5：情報を整理した太郎君と列車のグラフの概形
第 3 段階. 図 2.5 から解を求める。具体的には解 1 のとおりである。

指導上の留意点を述べる。

- ・授業構想 1 は問題の解を考えるにあたり、グラフの作成が重要であることを伝えるための授業構想である。グラフが、見通しをもって解を導くことやより一般的な問題を考えることに役立つことを伝える。
- ・授業構想 2 は (2) の授業を前提としている。グラフの重要性を理解してもらっている前提で、はじめからグラフの概形を考えて問題に取り組む。グラフの数値や正しいグラフの形がはじめからわかっているわけではないので、数値等が分かった後にグラフの形が変わる可能性があることを伝える必要がある。

3 おわりに

生徒の学習意欲を高めるための指導法の考察をした。グラフを用いての指導や複数の解法をあげる指導で、生徒の興味・関心を引くことができ、学習意欲を高められると考えられる。実際の授業を通して、生徒の学習意欲を高めるための指導法の考察を続けたい。

参考文献

- [1] 岡本和夫 他 133 名, 『未来へひろがる数学 1,2,3』, 啓林館, 大阪, 2021.
[2] 『中学校学習サイト』, ”<https://math.005net.com/2/daiya2.php>”, (参照 2021-11-5).