複数証明の比較による授業構想

2018SS015 平野 華帆
指導教員：佐々木克巳

1 はじめに

本研究の目的は，複数証明を比較することにより授業構想に必要な情報を整理し，よりよい授業作りに繋げていくことである．対象とする証明の元になる性質は，啓林館の中学校の教科書[1]から抽出した性質およびその条件変えにより得られる性質である．具体的には，[1]の「平行線と線分の比」，「平行線にはさまれた線分の比」，「中点連結定理」，「円周角の定理」，「三平方の定理」とその条件変えにより得られる性質を対象とする．そして，それらの性質の複数の証明法，その性質を扱うときの授業構想を考察する．本稿では，「平行線と線分の比」と「平行線にはさまれた線分の比」を扱う．

2 平行線と線分の比

この節では，平行線と線分の比に関する次の性質の考察とそれを踏まえた授業構想を示す．

性質 2.1. △ABC で，辺 AB，AC 上にそれぞれ点 P，Q があるとき，次が成り立つ(図 2.1 参照)．

(1) PQ//BC ならば，AP:AB=AQ:AC=PQ:BC

(2) PQ//BC ならば，AP:PB=AQ:QC

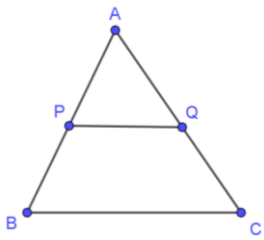

図 2.1：性質 2.1 の図

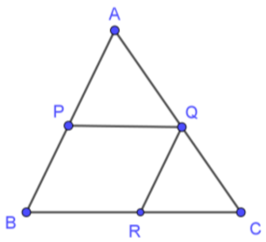

図 2.2：(2.1)の図

本稿では，性質 2.1(2)の条件変えによる性質を考える．具体的には，P,Q の位置がそれぞれ，

(2.1) 2 辺 AB,AC 上(もとの位置)

(2.2) 2 辺 BA,CA の延長線上(図 2.3 参照)

(2.3) 2 辺 AB,AC の延長線上(図 2.4 参照)

にある場合を考える．本研究では，このそれぞれについて，次の 3 つの証明方法を考察した．

証明方法 1. Q を通り，AB に平行な補助線を引く．

証明方法 2. C を通り，AB に平行な補助線を引く．

証明方法 3. 補助線は引かず変数を用いる．

本稿では，このうちの証明方法 1 による証明を考察する．

(2.1)の証明の概観．点 Q を通り辺 AB に平行な直線を引き，辺 BC との交点を点 R とする(図 2.2 参照)．平行線の同位角の性質から，△APQ∽△QRC であり，この辺の比から，AP:QR=AQ:QC を得る．四角形 PBRQ は平行四辺形なので，QR=PB であり，したがって，AP:PB=AQ:QC を得る．

(2.2)の証明の概観．点 Q を通り辺 AB に平行な直線を引き，辺 CB の延長線との交点を点 T とする．平行線の，錯角，同位角の性質から，△APQ∽△QTC であり,この辺の比から，AP:QT=AQ:QC を得る．四角形 QTBP は平行四辺形なので，QT=PB であり，したがって，AP:PB=AQ:QC を得る．

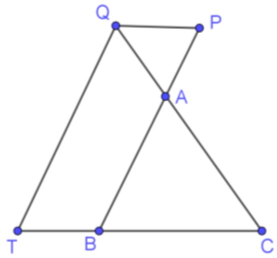

図 2.3：(2.2)の図

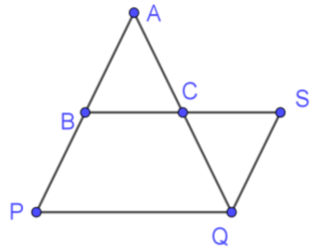

図 2.4：(2.3)の図

(2.3)の証明の概観．点 Q を通り辺 AB に平行な直線を引き，辺 BC の延長線との交点を点 S とする．平行線の，錯角の性質から，△APQ∽△QRC であり，この辺の比から，AP:QS=AQ:QC を得る．四角形 BPQS は平行四辺形なので，QS=PB であり，したがって，AP:PB=AQ:QC を得る．

上の 3 つの証明は，同じ方法で補助線が引けて，同位角か錯角かの違いはあるが，ほぼ同じ形で証明できている．証明方法 2 と 3 でも同様である．

次に，性質 2.1 を対象とした次の流れの授業について考える．

授業の流れ：

(S1) 性質 2.1(1)の証明を説明する．

(S2) 性質 2.1(2)の証明に取り組ませる．

(S3) 性質 2.1(2)の条件変えを，すなわち(2.2)，(2.3)を考えさせる．

この授業の流れにおける指導上の留意点や効果について述べる．

・(S2)では，少なくとも 3 つの方法で証明できるので，1 つの方法で証明が完了した生徒には，ほかの方法はないか考えさせる．

・(S2)の証明方法では，性質 2.1(1)と同様に相似な三角形を利用できるので，つまずいている生徒には，相似な三角形を作るにはどうするか問いかけをして，解に誘導する．

・(S2)では，最終的には 3 つの方法をクラスで共有する．

・(S3)では，3 つの各方法が(2.1)～(2.3)のどの場合にも適用できて，同様に証明できることをクラスで共有する．さらに，性質 2.1(2)は，P,Q が辺上でなく，2 直線 AB,AC 上であっても成立するというより一般的な形での理解も共有する．

3 平行線にはさまれた線分の比

この節では，平行線にはさまれた線分の比に関する次の性質の考察とそれを踏まえた授業構想を示す．

性質 3.1.　図 3.1 のように，3 本の平行線 l，m，n に 2 直線がそれぞれ A，P，B 及び R，Q，C で交わっている．このとき AP:PB=RQ:QC が成り立つ．

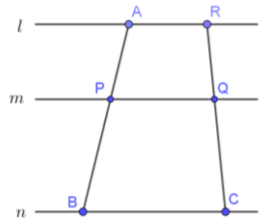

図 3.1：性質 3.1 の図

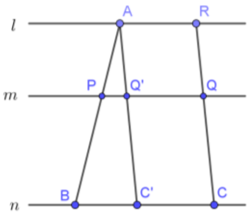

図 3.2：(1)証明 1 の図

この性質は A と R が重なるとき，性質 2.1(2)となるので，性質 2.1(2)の一般化といえる．この性質 3.1 の線分 AB と線分 RC の位置関係を変えた場合を考察する．

(1) 線分 AB と線分 RC が交わらないとき(図 3.1 参照)．証明方法は 2 つあり，その証明は以下の通りである．

証明 1.　A を通り RC に平行な直線を引き，m,l と交わる点をそれぞれ Q'，C'とする(図 3.2 参照)．このとき，m//n と性質 2.1(2)より，AP:PB=AQ':Q' C’を得る．四角形 AQ' QR，四角形 Q'C'CQ は平行四辺形なので，AQ'=RQ，Q'C'=QC である．よって，AP:PB=RQ:QC を得る．

証明 2.　2 直線 AB と RC の交点を S とする(図 3.3 参照)．このとき，l//m と(2.3)より，SP:AP=SQ:RQ を得る．また，m//n と性質 2.1(2)より，SP:PB=SQ:QC を得る．したがって，AP:PB=RQ:QC を得る．

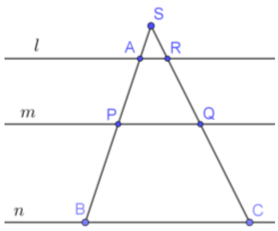

図 3.3：(1)証明 2 の図

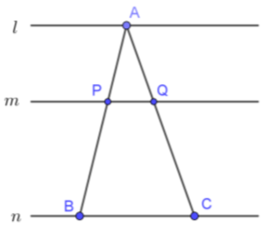

図 3.4：(2)の図

(2)　A と R が重なるとき(図 3.4 参照)．性質 2.1(2)と同じになる．

(3) 辺 AB と辺 RC が交わるとき(図 3.5 参照)．証明方法は 2 つあり，その証明は以下の通りである．

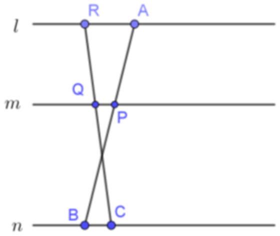

図 3.5：(3)の図

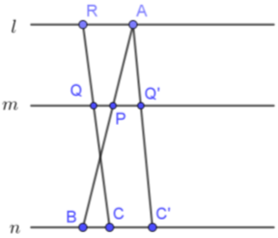

図 3.6：(3)証明 1 の図

証明 1.　A を通り RC に平行な直線を引き，m,l と交わる点をそれぞれ Q'，C'とする(図 3.6 参照)．このとき，m//n と性質 2.1(2)より，AP:PB=AQ':Q' C’を得る．四角形 RQQ’A，四角形 QCC’Q’は平行四辺形なので，RQ=AQ’，QC=Q’C’である．よって，AP:PB=RQ:QC を得る．

証明 2.　2 直線 AB と RC の交点を T とする(図 3.7 参照)．l//m と性質 2.1(2)より，TP:PA=TQ:QR を得る．また，m//n と(2.2)より，TP:PB=TQ:QC を得る．したがって，AP:PB=RQ:QC を得る．

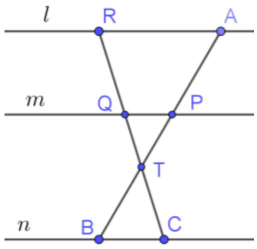

図 3.7：(3)証明 2 の図

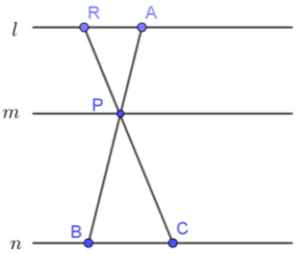

図 3.8：(4)の図

(4) 辺 AB と辺 RC が直線m上で交わるとき(図 3.8 参照)．本研究では，性質 2.1 の条件変えとして考察したが，本稿では省略する．

次に，前節の授業を前提としたときの，性質 3.1 を対象とした次の流れの授業について考える．

授業の流れ：

(S1) (2)の証明に取り組ませる．

(S2) (1)，(3)の証明に取り組ませる．

(S3) (4)の証明を説明する．

この授業の流れにおける指導上の留意点や効果について述べる．

・(S1)では，(2)の場合が性質 2.1 そのものであることに気づかせる．さらに性質 3.1 が性質 2.1 の一般化であり 2 つの性質を統一的にとらえることができることも伝える．

・(S2)の証明方法では，性質 2.1(2)を利用できるように補助線を引くよう，つまずいている生徒には伝え，証明 1 の解に誘導する．余裕のある生徒には証明 2 の補助線の引き方でも解けないか考えさせ，結果として性質 2.1(2)の条件変えの結果を利用できることを伝える．その際，条件変えでその性質をより一般的に理解すると，(1)，(3)の証明 2 などの応用の場面で役立ち，簡単に解けるようになることを伝える．

・(S2)では，(3)も同様に行う．

4　おわりに

証明を授業で行う際には, 既習の公式や定理との繋がりを大切にするべきだと感じた. 1 つの定理を証明するために, 三角形の相似や平行線の性質などを多く利用するので, 数学が苦手な生徒も理解しやすいようにその都度公式を示す必要があると思った. どの証明をどの順番で授業を行うのかなど, 本研究を活かして今後授業を行いたい.

参考文献

[1]　岡本和夫　他 133 名,『未来へひろがる数学 1,2,3』, 啓林館, 大阪, 2021.