

教科書の行間埋めによる授業構想

—中学校数学「方程式の利用」を中心として—

2018SS013 林田凌輔
指導教員:佐々木克巳

1 はじめに

本研究の目的は、教科書の行間埋めを行い、関連する情報を整理することで、数学的思考力を養う授業作りに繋げることである。この行間埋めは、図や表を利用した立式の考察、予想される生徒の解答、文字の数を変えた解法、問題の発展、各出版社の教科書比較を踏まえて行う。行間埋めの対象とする教科書は啓林館の[4,5]とし、対象とする単元は、「方程式の利用」とする。

本稿では、中学校第2学年の「連立方程式の利用」における、文字を使わない解法、および、中学校第1学年の「方程式の利用」における、方程式の解が問題に適しているかを確認させる問題の教科書比較について考察する。このそれぞれを以下の2節と3節で扱う。

2 文字の数を変えた解法の考察

この節では、[4]の「連立方程式の利用」の問題において文字を使わない解法を示し、それらを比較する。

文字を使わない解法は次の手順に従い、各問題の解は、この手順(i)~(v)に対応させて記述する。

手順. 2つの変数 x, y に対し、

$$x + y \text{の値} p \text{と} ax + by \text{の値} q$$

が与えられているとき、次のように y を求める(表 2.1 参照)。

- (i) $(x, y) = (p, 0)$ のときを考える。
- (ii) (i)のときの $ax + by$ の値(ap)を求める。
- (iii) q と(ii)の値の差($q - ap$)を求める。
- (iv) 適切な単位量 e を定め、(ii)の値と $(x, y) = (p - e, e)$ のときの $ax + by$ の値との差($(b - a)e$)を求める。
- (v) y の値は、 $\frac{(iii) \text{の値}}{(iv) \text{の値}} \times e = \frac{(q - ap)}{(b - a)e} \times e$ である。

この手順は、 $x + y$ の代わりに $cx + dy$ の値が与えられたときにも応用できる。

表 2.1: 文字を用いない解法の変量

x	y	$ax + by$
p	0	ap
$p - e$	e	$ap - ae + be$
\vdots	\vdots	\vdots
$p - en$	en	q

以下に本研究で扱った問題の中から代表的な3つを抽出し、その文字を用いない解法について述べる。

問題 1. 問題文を図 2.1 に示す。

解答例. ここでは、スポーツドリンクを‘SD’と表す。

- (i)先月売れた400本をすべてお茶とすると、
- (ii)今月は、400本の80%で320本売れたことになる。
- (iii)今月は345本売れたので25本足りない。
- (iv)先月売れたとした400本のうち10本がSDに変わると、今月は、お茶を400本としたときに比べ、お茶が8本

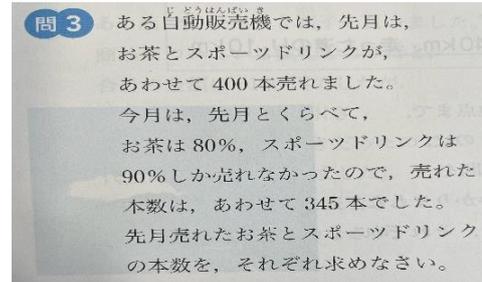


図 2.1:問題 1 の問題文(出典[4])

減、SDが9本増なので合計で1本増える。
(v)したがって、(iii)の25本を増やすためには $10 \times 25 = 250$ 本をSDに変えればよい。つまり、SDの本数は250本である。なお、お茶の本数は $400 - 250 = 150$ 本である。

問題 2. 問題文を図 2.2 に示す。

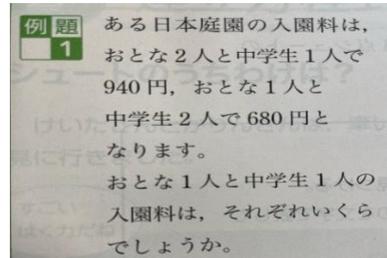


図 2.2:問題 2 の問題文(出典[4])

解答例.

- (i)おとな1人の入園料を680円、中学生1人を無料とすると、
- (ii)おとな2人と中学生1人で1360円となり、
- (iii)問題文のおとな2人と中学生1人の入園料より、420円高くなる。
- (iv)おとな1人の入園料を10円安くして、おとな1人と中学生2人で680円のままにするには、中学生1人で5円高く、おとな2人と中学生1人の入園料は、全体として15円安くすればよい。
- (v)したがって、(iii)の420円分を安くするには、中学生1人で $420 \div 15 \times 5 = 140$ 円とすればよい。なお、おとな1人の入園料は400円となる。

問題 3. 問題文を図 2.3 に示す。

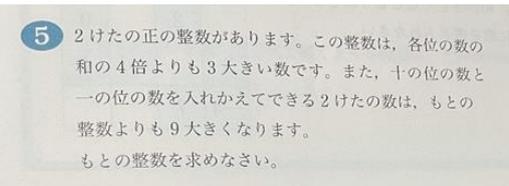


図 2.3:問題 3 の問題文(出典[4])

もとの整数の十の位を x 、一の位を y とおくと

$$\begin{cases} 10x + y = 4(x + y) + 3 \\ 10y + x = 10x + y + 9 \end{cases}$$

となる。この 2 式から手順にある形に変形はできるが、前 2 題のように、問題の意味に反映させて解くことは難しい。

3 つの問題を比較する。問題 2 は、 $x + y$ の代わりに $2x + y$ を用いるため、問題 1 と比較すると (iv) が複雑である。問題 3 は、今回の手順では困難である。

文字を使わない解法は、授業のなかでしっかりと扱うことはないが、紹介することで、文字の数を変化させても解けることや、いろんな解法があることを知ることで、数学の面白さを知ったり、興味を持ったりすることにつながると考える。

3 教科書比較

この節では、中学校第 1 学年の「方程式の利用」の、方程式の解が問題に適しているかを確認させる問題において、7 つの教科書 [1-3, 5-8] を比較する。具体的には、扱われている問題の比較と、この種の問題を扱う順序の比較をする。扱われている問題は、次の 3 つに代表される。

問題 4. 問題文を図 3.1 に示す(この問題は、「駅までは 2km」, 「弟は分速 80m で進む」を前提としている)。

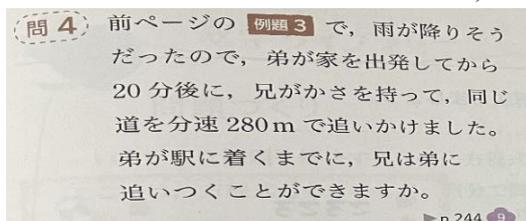


図 3.1: 問題 4(出典[5])

略解. x 分後に追いつくとして立式し、それを解くと、 $x = 8(2240\text{m で追いつく})$ となるが、駅までは 2km なので追いつけない。

問題 5. 問題文を図 3.2 に示す(この問題は、「現在、けいたさんは 13 歳、先生は 53 歳」を前提としている)。

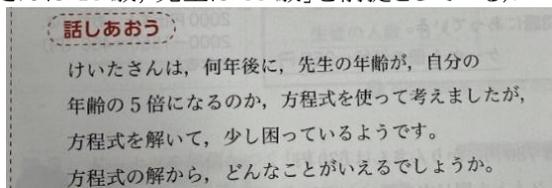


図 3.2: 問題 5(出典[5])

略解. x 年後として立式し、それを解くと $x = -3$ となるが、問題の解は正の数のため、問題にあう解はない。

問題 6. [4] の問題文とその考えを図 3.3 に示す。

問題 4 では、方程式の解が自然数となり、解だけでは、問題にあうか、あわないかがわからず、確かめることが必要である。問題 5 と問題 6 では、方程式の解を見ただけで問題にあわないことがわかる。問題 6 は、さらに、与えられている解について考えさせている。

次に扱う順序を比較する。

啓林館: 最初に問題 5 があり、その後、方程式の解が問題にあっている問題を経験させて、問題 4 がある。その後で、方程式を用いて身の回りの問題を解く手順をまとめている。

啓林館以外: この単元の最初の問題で、方程式を用いて

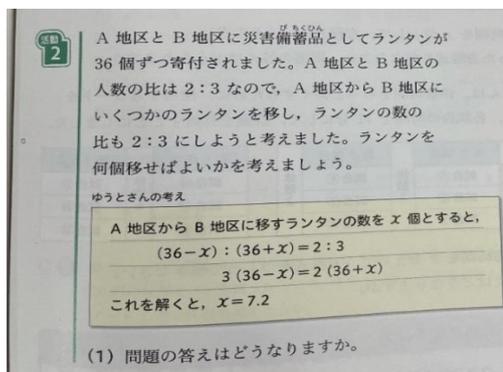


図 3.3: 問題 6(出典[8])

身の回りの問題を解く手順が示され、その手順の最後に「方程式の解が問題にあうかどうかを確認する」というステップがある。その後、(最初の問題も含め) 方程式の解が問題の解にあっている問題を経験させた後で、問題 4 の類題を扱っている。大日本図書だけは問題 5 の類題と問題 6 も扱っている。

7 社のうち、単元の最初から方程式の解が問題にあわない問題を扱うのは啓林館だけである。啓林館の教科書は最初からこの場合もあることを意識させようとしているのに対し、他の 6 社では、まずは方程式を用いて身の回りの問題を解く手順を定着させようとしていると考える。ここでは少なくとも 2 つの方法を知ることができた。

4 おわりに

本研究を通して、文字を使わない解法などの教科書にはないことを扱うことで、1 つの問題をさまざまな視点で見ることができた。これを生徒に伝えることで問題を解く力だけでなく、思考力を養ったり、数学の面白さに気づいたりすることができる。また、教科書比較では、各出版社のねらいが感じられ、それを教員が把握することで生徒が好奇心を持つことができる授業を行えると考える。

本研究で学んだことや考え方をいろいろな場面で生かし、卒業後の学びにつなげていきたい。

参考文献

- [1] 藤井齊亮 ほか 94 名, 『新しい数学 1』, 東京書籍, 東京, 2021
- [2] 池田敏和 ほか 47 名, 『中学校数学 1』, 学校図書, 東京, 2021
- [3] 岡部恒治 ほか 41 名, 『これからの数学 1』, 数研出版, 東京, 2021
- [4] 岡本和夫 ほか 132 名, 『未来へひろがる数学 2』, 啓林館, 大阪, 2015
- [5] 岡本和夫 ほか 132 名, 『未来へひろがる数学 1』, 啓林館, 大阪, 2021
- [6] 坂井裕 ほか 31 名, 『中学数学 1』, 教育出版, 東京, 2021
- [7] 重松敬一 ほか 40 名, 『中学数学 1』, 日本文教出版, 大阪, 2021
- [8] 相馬一彦 ほか 25 名, 『数学の世界 1』, 大日本図書, 東京, 2021