数理パズルの数学教育への応用

2017SE108　横谷　駿一
指導教員：佐々木克巳

1　はじめに

本研究の目的は，数理パズルの解法の応用と発展について，数学教育や一般教養の問題におけるいくつかの例を挙げながら考察することである．具体的には，[1]，[2]から抽出した 5 題の数理パズルの各解法を考察し，その解法や考え方を応用，発展することができる複数の問題を作成した．本稿では，そのうちの 1 題について述べる．2 節でその 1 題とその応用の考え方を示し，3 節と 4 節において応用例を述べる．

2　対象とするパズル

この節では，[1]から抽出した 1 題と，その考え方を示す．この 1 題は，これまで扱ってきた他の 5 題と比較したとき，「文章問題となっている数理パズルである」という特徴をもっている．

抽出した 1 題を以下に示す．

問題 2.1([1])，中山道に沿った信州の A 市では，中山道の姿を復元し，観光スポットの 1 つにしようと企画を 練っていた．

そこで，市役所観光課の山田さんは，復元される 500 メートルの旧街道沿いに，松を 10 メートルおきに植えるように言われた．松はスタート地点から，街道の端まで植える．全部で何本発注すればよいか

解（[1]）．問題より，500 メートルに松を 10 メートル間隔で植えるため，間隔の数は，

$$500 \div 10 = 50$$

より 50 個であることがわかる．街道の両端に松を植えることから，間隔の数にスタート地点分の 1 本を足した，51 本が回答となる．

この問題では，全体の長さから松と松の間隔の個数を求め，その個数をもとに松の合計を求めた．こういった計算の仕方は植木算と呼ばれている．上の問題では「間隔の個数」+1=「松の本数」であったが，植木算では，間隔の数とモノの数が必ずしも一致するわけではないことに注意が必要である．

3　問題の応用例

この節では，問題 2.1 の応用例を示す．この応用例には以下の 4 種類があり，どれも間隔とモノ(植木など)の数が必ずしも一致しないことに注意が必要な例である．

- 求める値と与えられた値を入れかえた例
- モノを重ねて並べた例
- 2 次元に並べた例
- 3 次元に並べた例

以下の各節で上の 4 種類を具体的に述べる．

3.1　求める値と与えられた値を入れかえた例

植木算では，「間隔の長さ」，「モノの数」，「全体の長さ」という 3 つの量が登場する．これらの量のうち 2 つが与えられれば，残り 1 つを求めることができる．問題 2.1 は「間隔の長さ」と「全体の長さ」が与えられて，「モノの数」を求める問題であった．ここでは，

・「全体の長さ」と「モノの数」が与えられて，「間隔の個数」を求める問題
・「間隔の長さ」と「モノの数」が与えられて，「全体の長さ」を求める問題

を示す．

問題 3.1.　400 メートルある道の端から端まで合計 40 本の木を植えたい．このとき，木と木の間隔は何メートルが適しているか．

問題 3.2. ある街道において，木と木の間隔は 10 メートルであった．また，街道の両端には木が植えられており，木の数は全部で 48 本あるという．このとき街道の長さは何メートルか．

「間隔の長さ(x)」，「モノの数(k)」，「全体の長さ(y)」の関係は

$$y = (k - 1) \times x$$

であるため，問題 3.1 は，$x = y/(k - 1)$，問題 3.2 は $y = (k - 1) \times x$ を用いて解くことができる．つまり，条件を扱う順序が違っているだけで，考え方に大きな違いはない．

3.2　モノを重ねて並べた例

ここでは，モノを重ねて並べた例を考える．この例は重なっている部分の長さも考慮した上で計算しなければならない．また，各問題を前節のように考えると，「モノの長さ」，「モノの数」，「全体の長さ」，「重なりの長さ」の各量を求める 4 種類の問題を作ることができる．以下にその具体例を示す．

問題 3.3. 外径（外側の直径）7 センチのリングがある．これを 10 個つなげると，全体の長さは 40 センチだった．このとき，リング 1 つあたりの線径（太さ）は何センチか．

問題 3.4. 外径が 8 センチ，線径が 1 センチのリングをいくつか繋ぐ．このとき，全体の長さが 80 センチよりも長くなるには，何個以上のリングを用いればよいか．

問題 3.5. 外径が 8 センチ，線径が 1 センチのリ ングを繋いでいく．リングを 20 個つなげると，全体の長さはどのようになるか．

問題 3.6. 線径が 1 センチのリングを 5 個繋ぐと，全体の長さは 42 センチになる．リングの外径は何センチか．

モノを重ねて並べる問題では,「モノの長さ(x)」,「モノの数(k)」, 「全体の長さ(y)」,「重なりの長さ(z)」の関係は,

$$kx - y = (k - 1) \times z$$

となる. 問題 2.1 の植木の数と間隔の数の関係が, この問題ではモノの数と重なりの数の関係になる. また, 重なりの長さの総和, つまり上の等式の右辺が, その左辺のように表現できることにも注意が必要である.

3.3 2 次元に並べた例

問題 2.1 ではモノを一直線上に並べる場合を考えたが, モノを 2 次元に並べた場合にも応用できると考える. 2 次元のとき, 対象となる量は「全体の個数」,「縦(または横の長さ)」,「モノとモノの間隔の長さ」となる. これらを求める問題例を以下に示す.

問題 3.7. 縦が 4.4 メートル, 横が 2.4 メートルの長方形の土地に図 3.1 のように縦横 40 センチごとに花を植えていく. このとき, 花は何本植えることができるか.
問題 3.8. チューリップが 120 本ある. これらを縦が 5 メートルの長方形の土地に図 3.1 のように縦横 1 メートル間隔で植えていく. 土地の境界にも植えるとき, 横幅はいくつあればよいか.
問題 3.9. 花が 55 本ある. これらを縦が 2 メートル, 横が 5 メートルの長方形の土地に図 3.1 のように縦横等間隔で植えていく. このとき, 間隔の長さは何メートルがよいか.

全体の形が長方形で縦横が等間隔となっているとき, 縦軸と横軸それぞれのモノの数の積が全体の数となる. 各軸の計算は一直線上と同じであるが, それらの積を考えるため, 縦軸の量と横軸の量をそれぞれ先に求め, 長方形全体の量を考えるという計算の順序に注意しなければならない. しかし, それぞれの計算自体は一直線上を同じであるため, 難易度は一直線上と比べて少し高い程度であると考える. また, 土地の形が違う場合も考えることができる.

上記の問題では長方形の場合を考えていたが, これが正三角形であった場合の問題例を以下に示す.

問題 3.10. 一辺が 10 メートルの正三角形の形をした土地がある. 図 3.2 のように間隔が 1 メートルになるように花を植えるとき, 合計で何本必要か.
問題 3.11. 120 本用意した花を, 図 3.2 のように 1 メートルおきに等間隔で植える. できるだけ大きい正三角形をつくるとき, 正三角形の 1 辺の長さは何メートルになるか.
問題 3.12. 一辺が 20 メートルの正三角形で図 3.2 のように花を植える. 花の数が 120 本で, これらをできるだけ広い間隔で植えるとき, 何メートル間隔で植えればよいか.

形が正三角形の場合,「一つの間隔の長さ(x)」,「一辺のモノの個数(k)」,「一辺の長さ(y)」,「全体の合計数(z)」の関係は,

$$z = k \times \frac{k+1}{2} = (x+y) \times \frac{2x+y}{2x^2}$$

となる. 四角形と異なり, 一辺あたりをもとに等差数列の和を計算して解を求めるようになっている.一辺あたりを求めてから, 等差数列の和を求めるという違いがあるため, 難易度も一直線上に比べて高いと考える. 量を求める順序を間違いやすいことと, 長方形とは異なり等差数列の和を用いていることに注意が必要である.

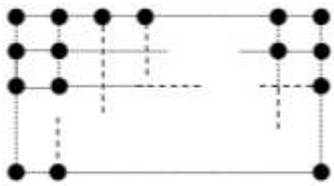

図 3.1 四角形の並べ方

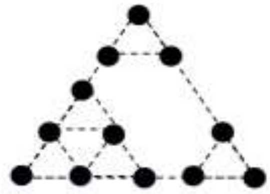

図 3.2 三角形の並べ方

3.4 3 次元に並べた例

モノを 3 次元に並べる場合にも 2 次元に並べた場合と同様に応用することができる. 3 次元に並べたとき, 対象となる量は「モノの数」,「間隔の長さ」,「1 辺の長さ」となる. これらを求める問題例を以下に示す.

問題 5.14. 図 3.3 のような立方体の形に, 間隔が 2, 1 辺あたりの点の個数が 20 のとなるように点を打っていくとき, 点の数は全部でいくつになるか.
問題 5.15. 729 個の点を図 3.3 の立方体の形になるように等間隔に打っていく. その立方体の体積が 512 となるとき, 間隔の長さはいくつになるか.
問題 5.16. 間隔 2 で, x 軸, y 軸, z 軸方向にそれぞれ 5 個の点を打ち, 図 3.3 のように立方体を作る. その立方体の体積はいくつか.

このとき, 縦, 横, 高さそれぞれの量の計算自体は一直線上と同じであるため, 計算方法や求め方に 2 次元に並べたときと大きな違いはなく, 難易度の差も小さいと考えた. しかし, 計算量が多いことに注意が必要である .

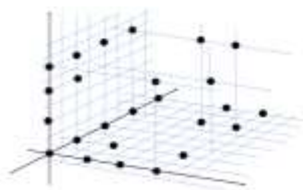

図 3.3 3 次元の並べ方

4 おわりに

本研究を通して, 数理パズルは, 数学教育や一般教養の考え方・解き方を知るきっかけや, 各分野の理解の基礎として利用できることを, 具体例を通して知ることができた.

参考文献

[1] 中宮寺薫,『数学パズルと算数思考』, オーエス出版, 東京, 2002.
[2] D.ウェルズ・宮崎興二・日野雅之,『ウェルズ 数理パズル 358』, 丸善出版, 東京, 2020.