図式化による証明問題の理解

2017SE039 越野 幹大
指導教員：佐々木克巳

1　はじめに

本研究の目的は，日本語で書かれた証明の筋道を図式化することにより，その証明の理解を深めることである．この図式化は，証明すべき性質の前提条件や，そこで認められている性質を明らかにした上で，それらに基づく推論を組み合わせて行う．とくに，問題が示す図に，問題文で述べられていない前提条件が含まれていそうな場合には注意する．このように図式化することで，証明すべき性質とその証明の筋道を正確に理解できると考える．

本研究で対象とする問題は，[1], [2]から抽出した6題である．本稿では，このうちの[2]の1題の証明を図式化する．

2　本研究で用いる図式

この節では，本研究で用いる図式の説明をする．その図式は，

- 対象となる証明に現れる文，
- それらの文をつなぐ矢印(矢印の近くに文をかくこともある)，

からなる．矢印は，その始点の文から，矢印の近くにかかれた文を根拠として，終点の文を導かれることを示す．また，この図式においての矢印の始点または終点となる文は，問題文で仮定として与えられているときは□で囲み，そうでないときは○で囲んで，それらを区別することもある(図 2.1 参照)．

本研究では，文献で与えられた証明の筋道を図式化し，その図式に，文と矢印を補って，認められた基本的性質のみを用いた筋道の図式を作成することで，証明の筋道の理解を深める．補った部分は，その部分を太字で示すことで，もとの図式と区別する．

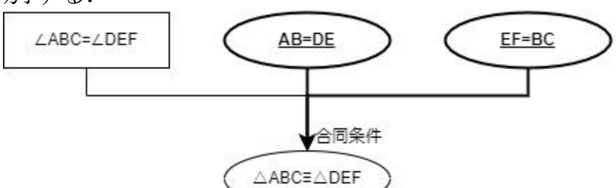


図 2.1:図式

3　証明の図式化

この節では，[2]から抽出した次の問題の証明を，その前提条件を明らかにした上で図式化する．

問題 3.1 ([2])．図 3.1 の△BAD と△BCE は直角二等辺三角形で，3 点 A, B, C は同じ直線上にある．
　このとき，AE=CD であることを証明しなさい．

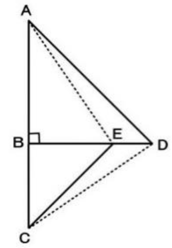


図 3.1:問題 3.1 の図(出典[2])

解([2])．△ABE と△DBC において，△ABD は二等辺三角形なので，

$$AB=DB \qquad (*1)$$

であり，△BCE は二等辺三角形なので，

$$BE=BC \qquad (*2)$$

であり，さらに AC⊥DB なので，

$$\angle ABE=\angle DBC=90^\circ \qquad (*3)$$

である．(*1), (*2), (*3)より，2 組の辺とその間の角が等しいので，

$$\triangle ABE \equiv \triangle DBC$$

であり，合同な図形に対応する辺は等しいので，

$$AE=DC$$

である．

まず，この問題の前提条件を明らかにする．そのために次の 4 条件を考察する．

条件 1 : $b_1=90^\circ$
条件 2 : $b_2=90^\circ$
条件 3 : 3 点 A,B,C は同じ直線上にある．
条件 4 : 点 E が直線 BD 上にある

ただし，$b_1=\angle ABD$, $b_2=\angle CBE$ である．この 4 条件を考察の対象とした理由は，以下の通りである．

- 条件 1 と条件 2 は，問題文の「直角二等辺三角形」と図 3.1 から読みとれるが，図なしでは，「直角二等辺三角形」のどの角が直角かがわからないこと．
- 条件 3 は，問題文にはあるが「解」には現れていないこと．
- 条件 4 は，問題文には現れないが，「解」の(*3)で用いられていること．

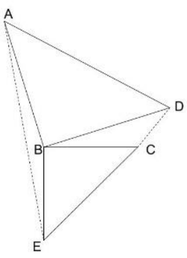
なお，考察を本質的な部分に絞るために，以下では AB>CB の場合のみを考えている．

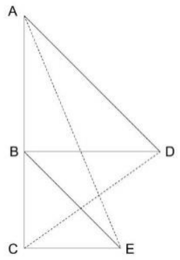
上の 4 条件の必要性を考察した結果を(1), (2)に示す.

(1) 4 条件からどの 2 条件を選択しても, その 2 条件から AE=DC は導かれない. 各 2 条件に対する反例を表 3.1 に示す.

表 3.1:各 2 条件に対する反例

	2 条件の選び方				反例
条件	1	2	3	4	
(1.1)	○	○			図 3.2
(1.2)	○		○		図 3.3
(1.3)	○			○	図 3.4
(1.4)		○	○		図 3.5
(1.5)		○		○	図 3.6
(1.6)			○	○	図 3.7





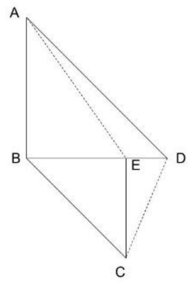
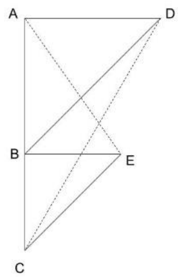
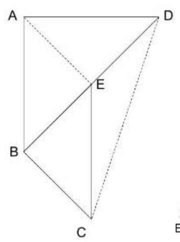


図 3.2:(1.1)反例　図 3.3:(1.2)反例　図 3.4:(1.3)反例





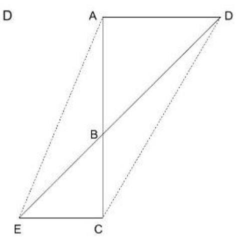


図 3.5:(1.4)反例　図 3.6:(1.5)反例　図 3.7(1.6)反例

(2)4 条件から, どの 3 条件を選択しても, その 3 条件から AE=DC は導かれる. ここで図 3.1 では, C は BD に対して A と反対側, E は AC に対して D と同じ側にあるが, 図なしでは, そうでない位置も考えられる. このような可能性も考えると, どの 3 条件を選択しても 2 つの直角二等辺三角形の位置関係は 4 パターンある. そして, そのどのパターンも AE=DC が導かれる. 図 3.8, 図 3.9, 図 3.10, 図 3.11 に 4 パターンを示す.

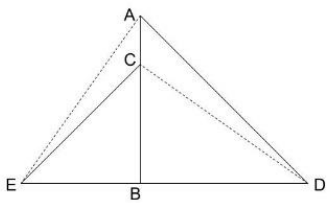


図 3.8:パターン 1

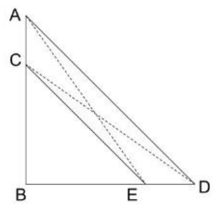


図 3.9:パターン 2

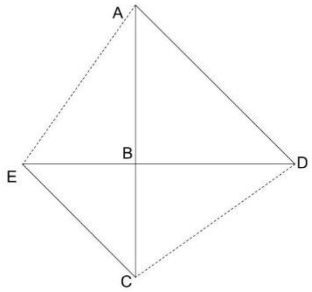


図 3.10 パターン 3

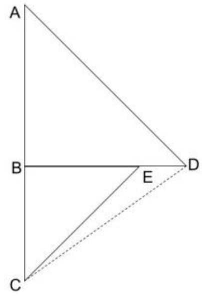


図 3.11 パターン 4

(1), (2)より, 問題 3.1 の前提条件は, その問題文と図 3.1 をふまえると, たとえば, 4 条件のうちの条件 1, 条件 2, および条件 3 を制限した
条件 5: 点 B は線分 AC 上にある
の 3 つであると考えることができる.

この前提条件をもとにして[2]の証明を補った図を, 図 3.12 に示す. なお, ここで認められている性質は, 中学校の数学で紹介されている性質である.

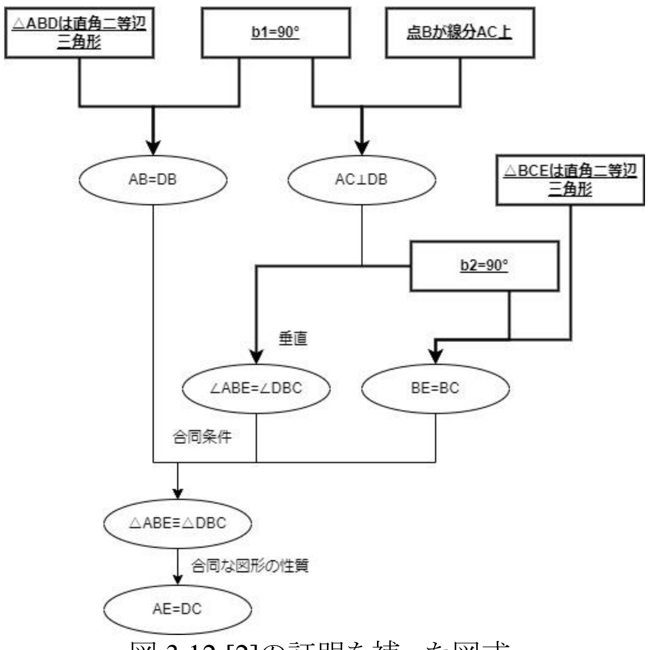


図 3.12:[2]の証明を補った図式

4　おわりに

証明問題を図式化することでどの条件, 性質が補っていないか一目で分かるようになった. また問題によってどの条件, 性質が省略されているかが分かり, 図式化することでより理解が深まった.

参考文献

[1]　東京出版編集部,『高校入試 1 対 1 の図形演習』, 東京出版, 東京, 2011.

[2]　「中学 2 年数学練習問題 図形と合同−三角形の合同の証明問題」, https://www.gyaku10study.net/math_tr/math2-tr37.php(参照 2021-12-24).