中学数学における和算の活用

2018SS012 服部美玲
指導教員：小藤俊幸

1　はじめに

和算とは日本で独自に発達した数学のことであり，明治新政府が江戸時代に導入した西洋数学の洋算と区別して新たに名付けられた数学文化の総称である．和算の問題や解法を絵馬にし，神社や仏閣に奉納したものを算額という．日本各地には約 1000 点もの算額が現存している [1].

和算の問題は高校の数学の中でも教材化されているものが多くあるのに対し，中学数学の範囲では扱われていることが少ない．中学数学において和算の問題に取り組ませ生徒の新たな興味・関心を持たせられるような授業展開を行いたいと思い，身近にある神社に奉納されている算額問題を取り上げ，授業を行うことを目標とする．

本研究では，三重県廣幡神社 ([2]，p.54)，愛知県泉蔵院 [3]，愛知県六所神社 ([2]，p.46) に奉納されている算額について取り上げる．ここでは特に廣幡神社についての授業案を述べる．他の算額については，卒業論文を参照．

2　授業案

今回の授業では，45 分授業のうち 1 つの算額問題を 1 コマ分で行う．また中学 3 年生を対象とした授業を想定して行うものとする．中学校新学習指導要領の数学科における評価の観点は,
・知識及び技能【知】
・思考力・判断力・表現力【思】
・主体的に取り組む態度【主】
である．

3　廣幡神社　算額

この算額は三重県三重郡菰野町にある廣幡神社にあり，文化 9 年 (1812) に村井長彰によって奉納され，2004 年 4 月 3 日 PeterWong と深川英俊によって発見されたものである ([2]，p.104)．次の問題は数学の三平方の定理を習い終わってからの応用・発展問題として取り扱うとする．

3.1　問題

今，図のように，外円の中に対称的に 2 個の大円と 4 個の中円と 2 個の小円を内接させる．外円の直径が 31.7 寸のとき，大円の直径を求めよ [2].

図 1 廣幡神社に奉納されている算額

3.2　目標

1. 三平方の定理を使って立式ができる【知・思】.
2. 長さの等しい部分に注目し関係式を作る【思・主】.

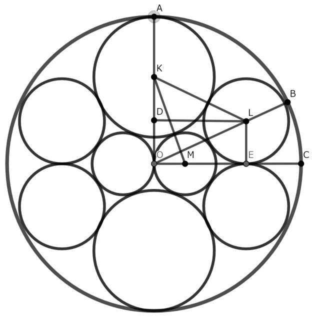

図 2 作図

3.3　導入

5 分程度で行う．問題に取り組む前に生徒に対して和算の問題を解くことを伝え，和算は日本で独自に発達したものであり神社に奉納してあるという話をする．今回の問題は三重県の菰野町にある廣幡神社にあるものと伝え身近な場所にある問題であることを実感させる．問題に取り組むにあたって以下のことを補足説明する．
・外円，大円，中円，小円の中心をO，K，L，M とする．
・大円，中円，小円の半径を k，l，m とする．
・外円と大円の接点を A，外円と中円の接点を B，Oから M を通る直線と中円との接点を E，その直線と外円との交点を C とする．また L から AO に下した垂線の足を D とする．
・寸という単位について説明をする．
・図から直角三角形に着目させる．直角三角形について三平方の定理を用いて立式できるかを問う【知・思・主】.
・外円の直径のみが与えられている状態なので最終的な式には k，l，m が残らないようにしなくてはいけないことを考えさせる【思・主】.
・3 つの文字を使ったので式は最低でいくつ必要であるか

問う【知】.
・外円の半径は与えられているものであるが，計算が複雑になるので外円の半径は x として計算をしていき最後に代入するものと伝える.

3.4 展開

20 分程度で行う．グループでの活動とし，その後に ICT 機器を用いて全体共有を行なった後に解説をする.
図より DL=a とおき，△ ODL において三平方の定理より，

$$\begin{aligned} a^2 &= (x-l)^2 - l^2 \\ &= x^2 - 2lx \end{aligned} \tag{1}$$

となる．次に，△ KDL において三平方の定理より，

$$\begin{aligned} a^2 &= (k+l)^2 - (x-k-l)^2 \\ &= -x^2 + 2kx + 2lx \end{aligned} \tag{2}$$

また，△ LME において三平方の定理より，

$$\begin{aligned} \mathrm{ME}^2 &= (l+m)^2 - l^2 \\ \mathrm{ME} &= \sqrt{m^2+2lm} \end{aligned} \tag{3}$$

次に，△ KOM において三平方の定理より，

$$\begin{aligned} (k+m)^2 &= (x-k)^2 + m^2 \\ 2km &= x^2 - 2kx \end{aligned} \tag{4}$$

生徒の反応を見て進行度を確認し数分たったら進度を調整するために着目する図形を示す．以上の 4 つの三角形に着目し，三平方の定理を使って式を立てることができる【知・思】.

ここからは今立てた式について図を活用し長さについての関係式を立てていくように指示をする.

(1)(2) より (左辺)=a^2 となっているので等式が成り立つことから，

$$\begin{aligned} 2x^2 - 4lx - 2kx &= 0 \\ k &= x - 2l \end{aligned} \tag{5}$$

$2l = x - k$ より KO=$2l$，すなわち KO と中円の直径が同じ長さであることがわかる【思】.

また，a=OE=OM+ME となるので (3) を用いて，

$$a = m + \sqrt{m^2+2ml}$$

となる。両辺を 2 乗して

$$\begin{aligned} a^2 &= (m+\sqrt{m^2+2lm})^2 \\ &= 2m^2 + 2lm + 2m\sqrt{m^2+2lm} \end{aligned}$$

ここで (左辺)=a^2 となったことから (1)(2) との等式がつくれることに気づかせる【思・主】.
右辺が m, l が使われていることから，どちらの式と等式を立てる方が良いか問う【知・思】．よって (1)(6) より式は，

$$\begin{aligned} x^2 - 2lx &= 2m^2 + 2lm + 2m\sqrt{m^2+2lm} \\ (x-2l)x &= 2m^2 + 2lm + 2m\sqrt{m^2+2lm} \end{aligned}$$

となり，この左辺に (5) 式を代入すると，

$$kx = 2m^2 + 2lm + 2m\sqrt{m^2+2lm}$$

この式を変形して両辺を 2 乗する.

$$\begin{aligned} (2m\sqrt{m^2+2lm})^2 &= (kx - 2m^2 - 2ml)^2 \\ k^2x^2 + 4l^2m^2 - 4klmx - 4km^2x &= 0 \end{aligned}$$

を得る．この式に (4)(5) を代入し整理すると，

$$\begin{aligned} 16k^3 - 25xk^2 + 10x^2k - x^3 &= 0 \\ (k-x)(16k^2 - 9kx + x^2) &= 0 \end{aligned}$$

よって，

$$k = x, \frac{9 \pm \sqrt{17}}{32}x \tag{6}$$

(6) 式については高校数学の範囲である 3 次方程式の因数分解を使うため立式後はこちらから説明を行う。その後，解が題に適しているか問う【知・思】．図から $m < l < k < x$ より $k = x, \frac{9-\sqrt{17}}{32}x$ は不適．$\sqrt{17}$ が出てくるので計算は電卓を用いて行うものとする．これより大円の直径は,

$$\begin{aligned} 2k &= \frac{9+\sqrt{17}}{32} \times 2x \\ &= \frac{9+\sqrt{17}}{32} \times 31.7 \\ &= 13.000076510377\cdots \\ &\fallingdotseq 13.0 \end{aligned}$$

となり，13 寸という答えが得られる.

3.5 まとめ

3 分程度で行う．今回の問題としては大円の直径を求めるものであったので，宿題に中円と小円の直径を求めてくるように指示する．また，数が大きいものは最初から代入してしまうのではなく別の文字で置くことによって問題が解きやすくなる場合もあることを伝える.

4 おわりに

このように中学数学においても和算問題を授業において扱うことができるのがわかる.

和算問題を取り入れることでいつもとは違った問題に触れることができ，生徒の新たな興味・関心を引くことができる．本研究を活かし，他にも身近な場所にある数学について学び授業で扱っていけるようにしたいと思う.

参考文献

[1] 和算ナビ (http://wasan.info/) 2021 年 10 月 4 日時点

[2] 深川英俊 :『特別展・庶民の算術展図録』．朝日新聞社事業本部名古屋企画事業チーム，2005

[3] 文化財ナビ愛知 (https://www.pref.aichi.jp/kyoiku/bunka/bunkazainavi/minzoku/yukeiminzoku/kensitei/0769.html) 2021 年 1 月 12 日時点