

柔軟梁の有限要素法モデルに対する低次元化の比較

2018SC043 近藤 丈詞

指導教員：陳 幹

1 はじめに

実制御問題を考える場合、制御対象は複雑なシステムとなることがある。複雑なシステムは高次になることが多く、コントローラ的设计が困難であったり、計算量が多くなるという問題がある。そのため複雑なモデルは低次に近似することで上記の問題を回避することができる。本研究では片持ち梁を題材に、一般に減衰項を入れずに使用するSVDを用いたモード分解による低次元化に対して減衰項を入れて、低次元化手法として確立されている平衡打切とどれだけ誤差が生じるのか、比較を行うことを目標にする。

2 柔軟梁の有限要素モデルの導出

図1に本研究で用いる片持ち柔軟梁を示す。ただし、要素数 n 、節点数 $n+1$ 、 $\{u_1(t), u_3(t) \dots u_{2n-1}(t)\}$ は横方向のたわみ、 $\{u_2(t), u_4(t) \dots u_{2n}(t)\}$ はたわみ角としたときの柔軟梁とする。また、表1に本研究で用いた物理パラメータを示す。[1]

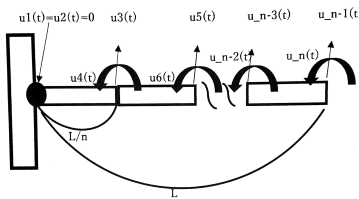


図1 柔軟梁の有限要素モデル

表1 物理パラメータ

物理パラメータ	数値	単位
梁の長さ:L	1	[m]
要素数:n	5	[個]
梁の断面の1辺:b	0.001	[m]
弾性2次モーメント:I	$\frac{b^4}{12}$	[m ⁴]
ヤング率:E	152.3×10^9	[N/m ²]
密度: ρ	7870	[kg/m ³]

柔軟梁の水平方向のふるまいを考え、入力を0とし、初期状態を与えた時の自由応答をシミュレーションする。片持ち柔軟梁のモデリングは参考文献[1]を参考に有限要素法によって行う。まずオイラーラグランジュ方程式より系の運動方程式は以下ようになる。

$$M\ddot{u} + D\dot{u} + Ku = 0 \quad (1)$$

ここで M は質量行列、 K は剛性行列、 D は減衰行列、 $u = \{u_1(t), u_2(t), \dots, u_{2n}(t)\}$ である。 $x = [u, \dot{u}]^T$ とし、減衰項は

質量行列と剛性行列の一次結合として $D = \alpha K + \beta M$ とする。ただし、 α, β は比例定数とする。以上を踏まえ、有限要素法モデルのシステムの状態方程式は以下ようになる。

$$P_{sys} = \begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \end{cases}, A = \begin{Bmatrix} O & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}D \end{Bmatrix} \quad (2)$$

$$C = \{O_{n-2} \quad 1 \quad O_{n+1}\}$$

3 SVDによるモード分解を用いた低次元化

参考文献[2][3]に示されている減衰項なしでSVDによるモード分解を用いた低次元化の概要を示す。質量行列と剛性行列を以下のように置く。

$$S\dot{x} + Gx = 0, S = \begin{Bmatrix} K & O \\ O & M \end{Bmatrix}, G = \begin{Bmatrix} O & -K \\ K & O \end{Bmatrix} \quad (3)$$

行列 S に対して特異値分解を用いると以下ようになる。

$$S = U\Lambda V^T \quad (4)$$

ただし U, V は直行行列で Λ は特異値の対角行列である。また、 S は対称行列であるので $U=V$ が成立し $S^T S = S S^T$ が成り立つ。次に、 R を $R = U\sqrt{\Lambda}$ のように定義する。また、 J を $J = R^{-1}G^T S^{-1}GR^{-T}$ のように定義する。 $x = X e^{jst}$ として J に対して以下の固有値分解を行う。

$$(J - s^2 I)X = 0 \quad (5)$$

式(5)を解くことにより $4n$ 個の固有値と固有ベクトルが求まる。固有値から固有周波数が固有ベクトルから固有モードが直ちに求まる。固有周波数を大きい順に並べ対角に並べた行列を $\Omega = \text{diag}\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{4n}\}$ とする。また、列固有ベクトルを縦に並べて正方行列にしたモード行列を $\Phi = [\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{4n}]$ とする。 J, Φ, Ω の関係は以下の関係を満たす。

$$J\Phi = \Omega^2\Phi \quad (6)$$

J のモード行列 Φ を用いて θ を以下のように定義する。

$$\theta = -\Phi^{-1}R^{-1}GR^{-T}\Phi \quad (7)$$

θ は減衰項が0の場合以下のような形で表される。

$$\theta = \begin{Bmatrix} O & \omega \\ -\omega & O \end{Bmatrix}, \omega = \text{diag}\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{2n}\} \quad (8)$$

$\xi = R^{-T}\Phi x$ としてモード変換すると相似システムは以下のようにになる。

$$P_{svd} = \begin{cases} \dot{\xi} = \theta\xi \\ y = CR^T\Phi\xi \end{cases} \quad (9)$$

振動システムの場合は低周波数に支配されるため、高次の固有周波数とそれに対応するモード行列を切り捨てることで $4n$ 次のシステムを $4r$ 次のシステムに低次元化を行う。ただし、 $n > r$ である。まず θ を低次元化を以下に示す。ただし、 $\hat{\theta} \in \mathbb{R}^{4r \times 4r}$ とする。

$$\hat{\theta} = \begin{Bmatrix} O & \hat{\omega} \\ -\hat{\omega} & O \end{Bmatrix}, \hat{\omega} = \text{diag}\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{2r}\}, \quad (10)$$

以上より $\xi_r \in \mathbb{R}^{4r \times 1}$ を用いて低次元化システムは以下のようになる。

$$G_{svd} = \begin{cases} \dot{\xi}_r = \hat{\theta} \xi_r \\ y_{svd} = \hat{C} \xi_r \end{cases} \quad (11)$$

$$CR^T \Phi = \{ C_1 C_2 \}, \hat{C} = C_1$$

以上が減衰項無しで低次元化する概要である。以下では減衰項をどのように入れたのかを示す。G に減衰項を入れて以下のように G_d と定義する。

$$G_d = \begin{Bmatrix} O & -K \\ K & D \end{Bmatrix} \quad (12)$$

減衰項が入った場合式 (8) の θ は上で示したようにきれいな形にはならない。しかし、切り捨てるべき低次の周波数とそれに対応するモード行列の箇所は、減衰項を入れる前の切り捨てる位置と一致すると考え、行列の同じ位置を切り捨てることで、低次元化する。 G_d を用いて (3)~(11) と同様の手順を行って、低次元化する。ただし減衰項ありのモード行列を Φ_d とし、 $\theta_d = -\Phi_d^{-1} R^{-1} G_d R^{-T} \Phi_d$ とし、 $\hat{\theta}_d$ は行列 θ_d を式 (10) と同様の箇所を切り捨てた行列とする。減衰項ありの低次元化システムは以下のようになる。

$$G_{svd-d} = \begin{cases} \dot{\xi}_r = \hat{\theta}_d \xi_r \\ y_{svd-d} = \hat{C}_d \xi_r \end{cases} \quad (13)$$

$$CR^T \Phi_d = \{ C_1 C_2 \}, \hat{C}_d = C_1$$

4 低次元化モデルの比較

終端に一定の力を加えることで柔軟梁がたわんだ状態で静止する。その状態から一定の力を外した時の自由応答を考え終端のたわみと極について比較する。ただし、比較対象にした平衡打切による低次元化は参考文献 [4] に示された平衡打切による低次元化の手法を利用した。表 2 に $\sum_{n=1}^Z (y_n - y_{svd-n})^2 / Z$ のように計算した平均二乗誤差を用いて次元数を減らした時の近似度を示す。また、図 2 に 4 次元まで次元を下げた場合に、残る極を示したものを示す。

表 2 から平均二乗誤差で評価した場合、どちらも低次元化ができてることがわかる。しかし、図 2 から減衰項を入れた SVD によるモード分解で低次元化した場合極の位置が、有限要素法モデルの極の位置からズレていることが確認できる。以上から、たわみだけ見れば、減衰項を入れた SVD によるモード分解でも低次元化することができたように思われたが、極の位置が変わってしまうという欠点があることがわかった。そのため、平衡打切を用いた低次元化のほうが正確なモデルが手に入ることがわかる。

表 2 低次元化した際の平均二乗誤差

	mode reduction	balanced reduction
20dim	1.476×10^{-27}	4.056×10^{-26}
16dim	1.228×10^{-13}	1.159×10^{-19}
12dim	1.492×10^{-12}	7.644×10^{-16}
8dim	4.250×10^{-11}	1.666×10^{-12}
4dim	9.523×10^{-9}	2.845×10^{-10}

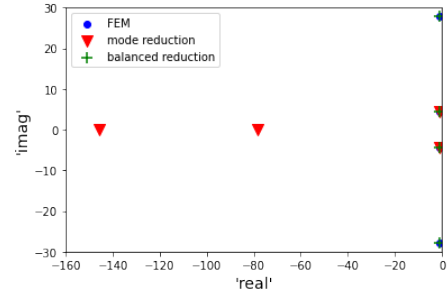


図 2 FEM モデルの極と 4 次元に低次元化したモデルの極

5 おわりに

本研究では片持ち柔軟梁に対するモデリングを行い、そのモデルに対して一般には減衰項がない場合に使用される減衰項を入れた SVD によるモード分解による低次元化に対して減衰項を入れた場合に、低次元化手法として確立されている平衡打切に対してどれくらい近づけるのかを数値的に検証した。今回の研究で減衰項を入れた SVD によるモード分解による低次元化では低次元化する際に極の位置が変化するという欠点があることが判明した。

参考文献

- [1] 野原 勉 著, ”エンジニアのための有限要素法入門 基礎から応用へ”, 培風館, 2016
- [2] Takemitsu TAKAGI, ”Model Reduction via Subsystem Decomposition for Flexible Rotor-Magnetic Bearing with Gyroscopic Effect”, The 2018 International Conference on Control, Electronics, Renewable Energy and Communications (ICCEREC)
- [3] Ming Ren and Kenzo Nonami, ”Modeling of Flexible Rotor Magnetic Bering Flywheel System with Gyroscopic Effect Using Singular Value Decomposition (1st Report: Precise modeling and control system design)”, Journal of the Japan Society Applied Electromagnetic and Mechanics, Vol. 14, No. 4, 2006. (Written in Japanese)
- [4] Kemin Zhou, John Doyle, Keith Glover, 劉 康志, 羅 正華 共訳, ”ロバスト最適制御”, コロナ社, 1996