高等学校数学における思考力・判断力を育成する指導法

2017SS068 杉浦大貴
指導教員：佐々木克巳

1 はじめに

本研究の目的は，高等学校の数学教育において思考力・判断力を育成するためには，どのような指導法をすべきか考察することである．具体的には，いくつかの問題とその解答例が思考力・判断力にどのように関わるのかを考察する．その考察は，[1], [4], [5]にしたがって行う．

本研究の動機は，2022 年度から高等学校において年次進行で実施される高等学校学習指導要領[3]で育成すべき資質・能力の三つの柱が定められ，そのうちの一つである思考力・判断力・表現力などの育成方法について大きな課題を感じたからである．また，今年度から実施される，大学入学共通テストの評価には，これまでの大学入試センター試験の評価にあった知識・技能に加えて，思考力・判断力・表現力が追加される（[2]）．そのため，教師はこれまでの指導に加えて，思考力・判断力・表現力を育成する指導もこれまで以上に重視していく必要があると考えたからである．

本研究の考察は，[4]の 13 個の問題を対象として，[4]の記述，[1]の Stage，[5]の「ふり返ってみること」にしたがって行った．本稿では，この「ふり返ってみること」のうち，チェバの定理の発展的考察とその授業設計への応用について述べる．

2 チェバの定理の発展的考察

この節では，チェバの定理に関する[4]の 2 つの問題（問題 3－3，問題 3－4）の振り返りから得られた 2 つの視点について，チェバの定理を考察する．

チェバの定理と[4]の 2 つの問題を以下に述べておく．

チェバの定理．ΔABCと点Pがある．各頂点A，B，Cと点Pを通る直線がそれぞれの対辺を含む直線と交わる点をX，Y，Zとする．このとき，
$$\frac{AZ}{ZB}\cdot\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}=1$$
が成り立つ（図 1 参照）．

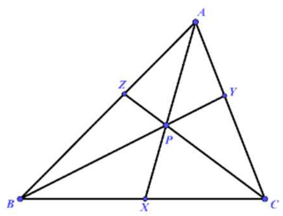

図 1:チェバの定理

[4]の問題 3－3 はチェバの定理を証明する問題で，問題 3－4 は，チェバの定理の点Pが，図 2 の位置にあるときに，チェバの定理の等式が成り立つかを問う問題である．問題 3－4 の答えは「成り立つ」である．

以下，2 つの視点とその考察を述べる．

視点 1．チェバの定理の別証明に対しても，その方法を問題 3－4 に適用できないか．

考察．チェバの定理の証明の別証明は 2 つあり，どちらの別証明の手法も問題 3－4 にも適用できる．以下，これらの別証明をその種類ごとに示し，その考察を述べる．

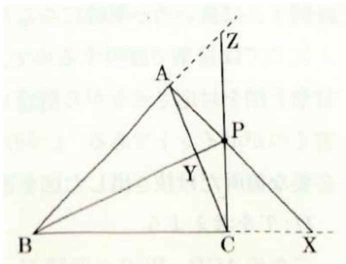

図 2:問題 3－4（出典[4]）

「ΔXYZ」が数式に現れるときは，ΔXYZの面積を表すとする．

チェバの定理の別証明 1．まず，$\Delta ABP:\Delta BCP$について考える．線分BYをΔABPとΔABY，ΔBCPとΔCBYの共通の底辺と考えると，
$$\Delta ABP:\Delta BCP=\frac{BP}{BY}\Delta ABY:\frac{BP}{BY}\Delta BCY=\Delta ABY:\Delta BCY$$
である．ΔABYとΔBCYは，直線AC上の辺を底辺とすると，高さの等しい三角形だから，$\Delta ABY:\Delta BCY=AY:YC$であり，
$$\Delta ABP:\Delta BCP=AY:YC$$
である．同様にして，
$$\Delta BCP:\Delta CAP=BZ:ZA$$
$$\Delta CAP:\Delta ABP=CX:XB$$
である．よって，
$$\frac{AY}{YC}\cdot\frac{CX}{XB}\cdot\frac{BZ}{ZA}=\frac{\Delta ABP}{\Delta BCP}\cdot\frac{\Delta BCP}{\Delta CAP}\cdot\frac{\Delta CAP}{\Delta ABP}=1$$
となる．

問題 3－4 の別証明 1．上の別証明と全く同じ表現が，この証明にもなる．ただし，図 1 の代わりに図 2 を用いる．

別証明 1 の考察．チェバの定理の別証明 1 がそのまま問題 3－4 に適用できた．ただし，チェバの定理に比べて，問題 3－4 では，注目すべき三角形の重なり方が異なるため，注目すべき三角形を選びにくくなっている．しかし，結果として証明は同じになるので，そのことを意識すれば，適切にその三角形を選ぶことができると考える．そして，上の証明を経験することにより，そのことを意識できるようになると考える．

チェバの定理の別証明 2．メネラウスの定理により，
$$\frac{AZ}{ZB}\cdot\frac{BC}{CX}\cdot\frac{XP}{PA}=1,\quad \frac{AY}{YC}\cdot\frac{CB}{BX}\cdot\frac{XP}{PA}=1$$
この左の式に右の式を逆数にした式を左辺同士・右辺同士でかけると，
$$\frac{AZ}{ZB}\cdot\frac{BC}{CX}\cdot\frac{XP}{PA}\times\frac{YC}{AY}\cdot\frac{BX}{CB}\cdot\frac{PA}{XP}=1\times 1$$
この式を展開して整理すると，
$$\frac{AZ}{ZB}\cdot\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}=1$$
となり，チェバの定理が示された．

問題 3－4 の別証明 2. 上の別証明と全く同じ表現が, この証明にもなる. ただし, 図 1 の代わりに図 2 を用いる.

別証明 2 の考察. 別証明 1 と同様に, 別証明 2 が, そのまま問題 3－4 に適用でき, 別証明 1 の考察と同じことがいえる. また, チェバの定理とメネラウスの定理は同じ単元内の定理であるので, その関連を見出しやすく互いに利用しやすいと考える. しかし, この場合メネラウスの定理が基本的にどのような場合に成り立つか, どのような定理であるのかといった基本的な事項を理解していなければならない.

視点 2. チェバの定理の結論を変えない範囲で, 問題 3－4 とは異なる条件変えができないか.

考察. Pの位置を次のように変えた条件変えを考える.

条件変え 1. ΔABCの二本の辺の延長線とその交点を境界とする, 三角形の外部(図 3 参照)
条件変え 2. ΔABCの辺上(頂点も含む)(図 4 参照)
条件変え 3. ΔABCの辺の延長線上かつ外部(図 5 参照)

結果, 条件変え 1 ではチェバの定理と同じ等式が成り立つが, 条件変え 2 と条件変え 3 ではうまくいかないとわかる. 問題 3－4 の結果と合わせると, チェバの定理は, 点Pの位置を, 3 辺の延長線(3 辺も含む)以外に点をとっても, 結論の等式は導かれるが, 点Pを, 3 辺の延長線上(3 辺も含む)にとる場合はうまくいかないとまとめられる.
　以下, 条件変え 1 と条件変え 2 の代表的な場合について, 詳しく述べる. 条件変え 3 は, 条件変え 2 と同様である.

条件変え 1. ΔABCの外部に図 3 のように点Pをとり, 3 点X, Y, Zをチェバの定理と同様にとると, チェバの定理と同じ等式が成り立つ.

証明. [4]における問題 3－3 の解答と本質的に同じ表現が, この場合の証明にもなる. ただし, 用いる図は図 3 である.

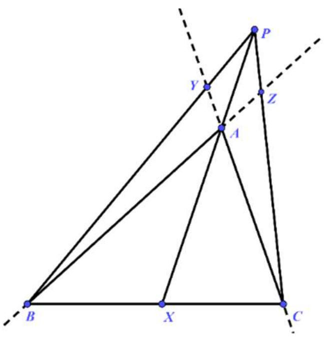

図 3:条件変え 1

条件変え 2. 三角形ABCの辺AC上に点Pをとり, 3 点X, Y, Zをチェバの定理と同様にとると, 図 4 のように, 点Cと点Xが同じ点となり, $XC = 0$となる. このXCが, チェバの定理の等式の分母に現れ, うまくいかないとわかる.

3　授業設計への応用

　この節では, 前節の内容の授業設計への応用例を挙げる. 具体的には, 前節の視点 1 で考察したチェバの定理の複数の証明法を活かした授業設計の例を挙げる. この例では, 問題の振り返りにおいて生じた疑問などから, さらに関連する話題へと発展させる考え方が活かされていて, 数学の問題解決における思考力・判断力につながると考える.

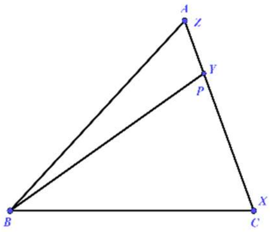

図 4:条件変え 2

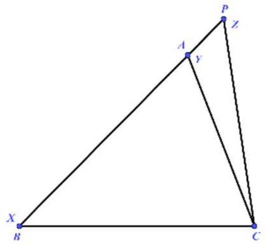

図 5:条件変え 3

　以下, その授業設計の例を, その授業の目標と主な学習活動の流れを示すことによって挙げる.

授業の目標. 与えられた構想の視点から解答を作成することを通して, 一つの命題に対して, 複数の証明方法があることの理解を深める.

主な学習活動の流れ.
導入. チェバの定理とメネラウスの定理の復習をする.
展開 1. 問題 3－3 の解の構想の視点から, チェバの定理の証明に取り組む. ※
展開 2. 別証明 1(前節)の構想の視点から, チェバの定理の証明に取り組む. ※
展開 3. 別証明 2(前節)の構想の視点から, チェバの定理の証明に取り組む. ※
まとめ. 授業の目標を確認する.
※これらの学習活動を促すために, 教師は状況に応じて証明の視点を示し, 証明の見通しをもたせる.

4　おわりに

　以上のように, Stage 分析と振り返りから得られたことが, 授業設計への応用につなげられるとわかった. 本研究では本稿で扱った問題以外の問題も扱ったが, それらも授業設計や発問に活かすことができると考える.

参考文献

[1] 河合塾数学科,『これからの大学入試に必要な数学の「思考力」を鍛える問題集』, 河合出版, 東京, 2018
[2] 独立行政法人大学入試センター,「大学入学共通テスト｜大学入試センター」, https://www.dnc.ac.jp/daigakunyugakukibousyagakuryokuhyoka_test/index.html(参照 2020-07-24)
[3] 文部科学省,『高等学校学習指導要領(平成 30 年告示)解説　数学編　理数編』, 学校図書, 東京, 2019
[4] 吉田信夫,『ほぼ計算不要の思考力・判断力・表現力トレーニング　数学 1A』, 東京出版, 東京, 2018
[5] George Polya 著, 柿内賢信訳,『いかにして問題を解くか』, 丸善, 東京, 1975