学習意義を意識した数学の授業構想

2017SS046 長坂 大介
指導教員: 佐々木克巳

1 はじめに

本研究の目的は，数学の学習意義を意識した授業を構想することで，より効果的な数学の授業を考察することである．本研究の動機は，3 年次の数学科指導法 B の授業で模擬授業をした際に，学習意義を意識することと効果的な授業の構想との関係に興味を持ったからである．

本研究では，[1]を参考に 7 つの授業構想例を挙げた．この 7 つの例ごとに主な学習意義とそれを踏まえた目標を定め，授業の流れの各段階にも学習意義を対応づけた．また，効果的な授業を意識して，例によっては発展的考察も行った．7 つの授業構想例の単元とその主な学習意義は表 1 の通りである．

表 1:授業構想例の単元と主な学習意義

単元	主な学習意義
数学Ⅰ「集合と命題」	基本的なベン図を用いる問題で基礎を定着させた上で，その考え方を応用できる問題で思考力や多面的な考え方を育成する．
数学Ⅰ「図形の計量」	三角形の角の二等分線の長さに関する複数解法のある問題を取り上げ，その複数の解法を比較することで，多面的な考え方を育成する．
数学Ⅰ「図形の計量」	教師の誘導にしたがって，現実の問題(見かけの高さの問題)を数学的に説明できることを実感させる．
数学Ⅱ「等式と不等式の証明」	2 時間構成とし，生徒自らが考え気づけるように時間を確保することで，数学的に考える力を育成する．
数学Ⅱ「図形と方程式」	具体的な点を座標平面上にプロットして軌跡を予想する活動を通して，帰納的に推論する力を育成する．
数学 A「場合の数と確率」	予想が分かれそうな確率の問題の，予想と実験結果を数学的な解答に結びつける活動を通じて，実際の事象を数学的に解釈する力を育成する．
数学 B「数列」	具体的な問題から，規則性を見出し，それを数列の一般項や漸化式で表現する活動を通して，数学的に表現する力を育成する．

本稿では，その 7 つのうちの，5 つ目，すなわち，数学Ⅱ「図形と方程式」における軌跡の問題を用いた授業構想例(以下「授業構想例 1」という)について述べる．まず，2 節で授業の目標と学習意義を踏まえた授業の流れを示し，3 節にそこで扱う問題の詳細を示す．そして，4 節でその問題の発展的考察を行い，5 節で授業構想例 1 全体を考察する．この授業構想例 1 では，[1]の問題等を，表現を変えて用いているが，そのような問題等には，問題等の番号の後に文献番号を付記している．

2 目標と学習意義を踏まえた授業の流れ

この節では，授業構想例 1 の目標と学習意義を踏まえた授業の流れを示す．その目標は以下に，授業の流れは表 2 に示す．
授業の目標：帰納的な推論により問題解決の見通しが立てられることを知る．

表 2:学習意義を踏まえた授業の流れ

	学習活動	学習意義
導入	軌跡の方程式の求め方を復習する．	基礎知識の確認
展開 1	三角形の重心の軌跡の方程式を求める問題を具体的な点をプロットさせて，予想する．	帰納的に推論する力の育成
展開 2	展開 1 の予想を共有する．	多面的な意見を知ること
展開 3	展開 1 の予想を証明する．	数学的に考える力の育成
展開 4	展開 3 の証明を共有する．	多面的な意見を知ること
振り返り	本時の流れを確認する．	本時の内容定着

3 授業で扱う問題

この節では，表 2 の展開 1 で扱う問題の詳細を示す．具体的には，その問題を示した後，表 2 における展開 1 の予想と展開 3 の証明を示す．

問題 1(展開 1 の問題，[1])．座標平面上に 2 点 A(−3, 0)，B(3, 0)と，直線$y=6$上の点 C があり，△ABC の重心を G とする．点 C が直線$y=6$上を動くとき，点 G の軌跡の方程式を求めよ．

問題 1 の予想(展開 1 の具体的な点のプロットによる予想，図の一部は省略)．点 C の座標が$(0,6),(3,6),(-5,6)$のときの重心をそれぞれG_1, G_2, G_3とすると，それらの座標は$G_1(0,\ 2), G_2(1,\ 2), G_3(-\frac{5}{3},\ 6)$となる($G_3$の座標を図 1 に示す)．さらにそれらを同じ座標平面上にプロットすると図 2 のようになる． 図 2 より，点 G の軌跡の方程式は$y=2$

になると予想できる．

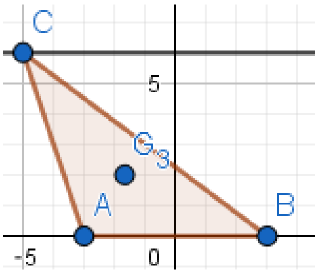

図 1：重心G_3

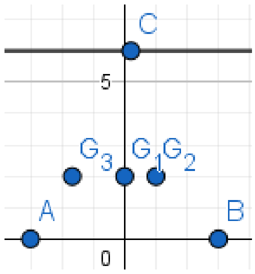

図 2：G_1とG_2とG_3

問題 1 の予想の証明(展開 3 の証明，[1]をもとに作成)．
C の座標を$(c,\ 6)$，G の座標を$(x,\ y)$とおくと，

$$x=\frac{(-3)+3+c}{3}=\frac{c}{3},y=\frac{0+0+6}{3}=2$$

であるから，G の軌跡の方程式は，$y=2$となる．

4 発展的考察

この節では，授業構想例 1 の発展的考察を行う．具体的には，3 節で挙げた問題 1 の下線部(すなわち，点 C の条件)を

・直線$y=x+6$
・円$x^2+(y-6)^2=4$
・放物線$y=x^2+6$

と変更した問題を考える．変更した問題を上から問題 2，問題 3，問題 4 とする．以下では，その 3 つの各問題に対して，具体的な C の座標に対する重心の座標から解を予想する過程の概要を示す．予想の証明は問題 3 に対してのみ示す．

問題 2(C が傾き 1 の直線の上を動く場合)の予想([1]をもとに作成)．点 C の座標が$(0,\ 6),(3,\ 9),(-3,\ 3)$のとき，重心をそれぞれG_1,G_2,G_3とすると，それらの座標は$G_1(0,\ 2),G_2(1,\ 3),G_3(-1,\ 1)$となる．さらにそれらを同じ座標平面上にプロットすると図 3 のようになる．図 3 より，点 G の軌跡の方程式はG_2を通る傾き 2 の直線，すなわち，その方程式は$y=x+2$になると予想できる．

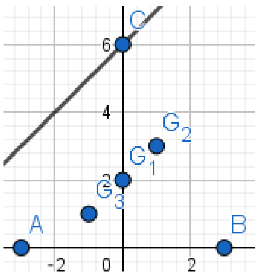

図 3：G_1とG_2とG_3

問題 3(C が円$x^2+(y-6)^2=4$上を動く場合)の予想([2]をもとに作成)．点 C の座標が$(0,\ 8),(-2,\ 6),(2,\ 6),(0,\ 4)$のときの重心をそれぞれ$G_1,G_2,G_3,G_4$とすると，それらの座標は，$G_1(0,\ \frac{8}{3}),G_2(-\frac{2}{3},\ 2),G_3(\frac{2}{3},\ 2),G_4(0,\ \frac{4}{3})$となる．さらにそれらを同じ座標平面上にプロットすると，図 4 のようになる．図 4 より，点 G の軌跡は，中心がG_1とG_3の中点$(0,2)$で半径 1 の円，すなわち，その方程式は$x^2+(y-2)^2=\frac{4}{9}$になると予想できる．

問題 3 の予想の証明．C の座標を(c,d)，重心 G の座標を(x,y)とおくと，

$$x=\frac{(-3)+3+c}{3},y=\frac{0+0+d}{3}$$

つまり，$(c,d)=(3x,3y)$となる．(c,d)はその円上の点なので，$c^2+(d-6)^2=4$である．$(c,d)=(3x,3y)$を代入して，点 G の軌跡の方程式$x^2+(y-2)^2=\frac{4}{9}$を得る．

問題 4(C が放物線$y=x^2+6$上を動く場合)の予想([1]をもとに作成)．点 C の座標が$(0,\ 6),(1,\ 7),(3,\ 15),(-3,\ 15)$のときの重心をそれぞれ$G_1,G_2,G_3,G_4$とすると，それらの座標は$G_1(0,\ 2),G_2(\frac{1}{3},\ \frac{7}{3}),G_3(1,\ 5),G_4(-1,\ 5)$となる．さらにそれらを同じ座標平面上にプロットすると，図 5 のようになる．これより，点 G の軌跡は頂点がG_1でG_3を通る放物線，すなわち，その方程式は$y=3x^2+2$になると予想できる．

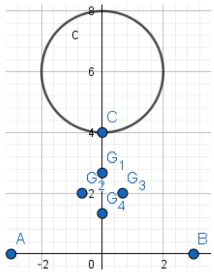

図 4：問題 3 の重心

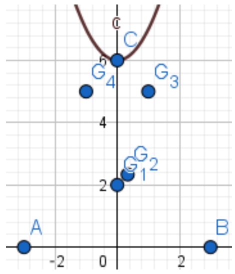

図 5：問題 4 の重心

5 考察

授業構想例 1 では，理解しづらく敬遠されやすい軌跡の問題を，帰納的な考え方で予想して，見通しをもつ経験をさせられる授業になると感じた．

4 節の発展的考察においては，問題 3，問題 4 の円と放物線は，プロットする点を増やしているが，それでも予想しづらかった．このことより，授業では問題 1 や問題 2 のような直線を対象とする問題を用いるのがよく，問題 3 や問題 4 は，理解が早い生徒の関心・意欲を維持するのに用いるのがよいと考える．

6 おわりに

本研究で教壇に立ったときに実践してみたい授業が増えた．これからは本研究を活かした授業をしていきたい．

参考文献

[1]『アクティブラーニングを位置付けた高校数学の授業プラン』，明治図書，東京，2017