形式体系を用いた証明の分析
－数学的帰納法を中心として－

2017SS031 加藤舞羽
指導教員：佐々木克巳

1　はじめに

本研究の目的は，数学的帰納法を用いた証明を形式体系における証明図を用いて表現することで，その証明の理解を深めることである． 具体的には，数学的帰納法を用いて証明されている11個の命題に対し，その命題の証明を形式体系の証明図で表現し，文献で与えられている日本語証明との比較などから，証明すべき命題の正確な内容，適切な日本語証明の表現，数学的帰納法を用いる際の注意点などを分析し，その理解を深める．

11 個の命題の分析は，個別の分析の他に，その種類ごとの傾向もまとめた．本稿では，そのうちの「$\forall nP(n)$」の形の前提条件がある問題の分析結果を示す．2 節で分析に必要なシークエントと証明図を導入し，3 節でその分析結果を示す．

2　シークエントと証明図

この節では，佐々木[1], [2]に従って，シークエントを導入し，さらに，そのシークエントの変化により証明を表現した証明図を導入する．

2.1 シークエント

$n+1$個の述語 $P, P_1, \dots, P_n$に対し，表現

$$P_1, \dots, P_n \Rightarrow P$$

をシークエントという($n = 0,1,2, \dots$)．“$P_1, \dots, P_n$” をこのシークエントの左辺，Pを右辺という($n = 0$のとき，左辺は空列を表す)．シークエントの左辺において，述語の重複と順番は，異なっていても区別しないとする．シークエントの意味は，「左辺に現れる述語から右辺の述語が導かれる」である．証明の構想においては，左辺が「使える性質の列」，右辺は「導きたい性質」となる．また，必要に応じて論理記号∧(かつ)，∨(または)，→(ならば)，¬(～でない)，限定記号$\forall x$(すべてのxに対して～)，$\exists x$(あるxが存在して～)，および矛盾を表す記号⊥を用いる．さらに，述語を表すのに，$P, Q, R, P_1, P_2, \dots$を用いる．xについての述語は，$P(x)$と表すこともある．

2.2 証明図

証明は推論を繰り返して構成される．故に，証明における各推論をシークエントの変化で表現できれば，証明もシークエントの変化で表現できる．以後，n個のシークエント$S_1, \dots, S_n$からシークエントSへの変化を

$$\frac{S_1 \ \dots \ S_n}{S}$$

と表現し，これを推論規則という．各S_iをそれぞれの推論規則の上式，Sを下式という．

ある推論規則，$\dfrac{S_2}{S_1}$の下式S_1が，別の推論規則$\dfrac{S_3 \ \ S_4}{S}$の上式S_3と等しいとき，

$$\cfrac{\cfrac{S_2}{S_1} \quad S_4}{S}$$

のように上に積み上げることができる．このように，あるシークエントから，正しいと認めた推論規則を積み上げていき，正しいと認めたシークエントに到達した図式を証明図という．本稿では，$P, \Gamma \Rightarrow P$を正しいと認め，次の推論規則を正しいと認めて用いる．また，整数や演算の性質などで，一般に正しいと認めているものは，本稿でも正しいと認めることにする．

$$\frac{P(1), \dots, P(k), \Gamma \Rightarrow Q}{\forall n(n \leq k \to P(n)), \Gamma \Rightarrow Q} (\forall\to 左)$$

$$\frac{P(t), \Gamma \Rightarrow Q}{\forall xP(x), \Gamma \Rightarrow Q} (\forall 左)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow P(1) \quad \Gamma,\ P(k) \Rightarrow P(k+1)}{\Gamma \Rightarrow \forall nP(n)} \text{(MI)}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow P(1) \quad \forall n(n \leqq k \to P(n)),\ \Gamma \Rightarrow P(k+1)}{\Gamma \Rightarrow \forall nP(n)} \text{(MI)}$$

ただし，Γは述語の有限列，(∀右)におけるzは，その下式において自由に出現しない変数，(∀左)におけるtは任意の項である．また，(∀→左)と 2 つの(MI)における，$n,\ k$は正の整数を表し，2つの(MI)におけるkはその下式において自由に出現しない変数である．なお，2 つの(MI)は数学的帰納法の原理を表す．

本稿では，証明図を簡潔に表現するために，証明図の各推論規則において，上式の左辺では下式左辺の部分列を“↑”で表してもよいとし，上式右辺と下式右辺が一致するときは，上式右辺を“↓”で表してもよいとする．

3　分析結果

本研究で対象とした 11 個の命題のうち，「$\forall nP(n)$」の形の前提条件がある問題の分析結果を述べる．3.1 節でその概要を示し，3.2 節で具体例を 2 つ挙げる．

3.1 分析結果の概要

この節では，「$\forall nQ(n)$」の形の前提条件がある問題の分析結果の概要を述べる．この問題では，「nについての数学的帰納法」の「n」と条件「$\forall nQ(n)$」の「n」が混乱する恐れがあるが，証明図では，示すべきシークエントにおいて「$\forall n$」が左辺と右辺にそれぞれ現れることで明確に区

別されている. この区別を意識することは, 日本語証明の正確な理解や適切な日本語証明とその表現につながると考える. なお, 条件「$\forall n Q(n)$」は, 3.2 節の分析 1 では漸化式, 分析 2 では漸化式ではない形の問題文の条件である. 漸化式でない分析 2 の方が漸化式の分析 1 などよりも, その区別は読み取りにくいと考える. このことから, この区別は, 漸化式以外の形で明記されているときに必要とわかる.

3.2 具体例

この節では, 本研究で扱った「$\forall n P(n)$」の形の前提条件がある問題のうちの 2 題について, それらを証明図で表現し, 分析する. 以下では, その各命題の証明と分析を,「(証明すべき)命題」,「証明」,「証明図」,「考察」の順に示す.

分析 1.

命題([4]): $\{a_n\}$が次のように定められている.

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n + a_{n+1} = n + 1 \end{cases}$$

このとき$a_{2n} = n, a_{2n-1} = n$であることを証明せよ.

証明: 前半($a_{2n} = n$)の証明

(ｉ) $n = 1$のとき, $a_2 = -a_1 + 2 = -1 + 2 = 1$だから, 前半の等式が成り立つ.

(ⅱ) $n = k$のとき前半の等式が成り立つ, すなわち$a_{2k} = k$と仮定する. このとき$n = k + 1$のときも前半の等式が成り立つことが次のように示される.

$$\begin{aligned} a_{2(k+1)} &= a_{2k+2} \\ &= a_{(2k+1)+1} \\ &= -a_{2k+1} + 2k + 1 + 1 \\ &= -(-a_{2k} + 2k + 1) + 2\mathrm{k} + 2 \\ &= a_{2k} + 1 = k + 1 \end{aligned}$$

証明図: 前半の証明図の下の方を図 1 に示す. ただし, n, kは正の整数とする.

$$\uparrow,\ a_2 = 1 \Rightarrow \downarrow$$
$$\uparrow,\ a_2 = 2 - 1 \Rightarrow \downarrow$$
$$\uparrow,\ a_1 + a_2 = 2 \Rightarrow \downarrow$$
$$(\forall 左)$$
$$\uparrow \Rightarrow\ a_2 = 1$$

$$\vdots$$
$$\uparrow,\ a_{2k+1} + a_{2k+2} = 2k + 2 \Rightarrow \downarrow$$
$$(\forall 左)$$
$$\uparrow,\ a_{2k} + a_{2k+1} = 2k + 1 \Rightarrow \downarrow$$
$$(\forall 左)$$
$$\uparrow,\ a_{2k} = k\ \Rightarrow\ a_{2(k+1)} = k + 1$$

$$(\mathrm{MI})$$
$$a_1 = 1,\ \forall n(a_n + a_{n+1} = n + 1)\ \Rightarrow\ \forall n(a_{2n} = n)$$

図 1：分析 1 前半の証明図

考察: 証明すべき命題において$\forall n$が左辺と右辺の 2 ヶ所に現れていて, 3.1 節で述べた区別が明確になっている.

分析 2.

命題([3]): 正の項からなる数列$\{a_n\}$が, 全ての自然数nに対して次の等式を満たすとき, 一般項a_nを求めよ.

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 = {a_1}^3 + {a_2}^3 + \cdots + {a_n}^3$$

また求めた一般項を数学的帰納法で証明せよ.

証明: $a_n = n$を示す.

(ｉ) $n = 1$のとき, ${a_1}^2 = {a_1}^3$より${a_1}^2(a_1 - 1) = 0$である. $a_1 > 0$より$a_1 = 1$ だから, $a_n = n$である.

(ⅱ) $n \leq k$のとき$a_n = n$が成り立つと仮定する. $n = k + 1$のとき, $a_{k+1} = k + 1$となることを示す.

$$\begin{aligned} &(a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1})^2 \\ &\qquad = {a_1}^3 + {a_2}^3 + \cdots + {a_k}^3 + {a_{k+1}}^3 \end{aligned}$$

だから, 帰納法の仮定より,

$$(1 + 2 + \cdots + k + a_{k+1})^2 = 1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 + {a_{k+1}}^3$$

$$\left\{\frac{1}{2}k(k+1) + a_{k+1}\right\}^2 = \left\{\frac{1}{2}k(k+1)\right\}^2 + {a_{k+1}}^3$$

である. これを整理すると,

$$a_{k+1}(a_{k+1} + k)\{a_{k+1} - (k + 1)\} = 0$$

となるので, $a_{k+1} > 0$より$a_{k+1} = k + 1$である.

証明図: 図 2 に示す. n, kは正の整数である.

考察: 図 2 の一番下のシークエントにあるように, この問題には, nについての条件が 3 つ現れる. そのシークエントでは$\forall n$の範囲が明確に表現されているが, それを誤って「$\forall n(a_n > 0) \Rightarrow \forall n((a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 = {a_1}^3 + {a_2}^3 + \cdots + {a_n}^3 \rightarrow a_n = n)$」のように, 解釈してしまう可能性はあると考える.

4 おわりに

様々な証明問題について, 証明図で表現することで, 日本語証明の誤りや証明する際の注意点, 日本語証明の表現の重要性に気付くことができた.

参考文献

[1] 佐々木克巳,「シークエントによる証明の構想の図式化」, 教職センター紀要第 2 号, 南山大学教職センター, pp, 46-60, 2017

[2] 佐々木克巳, 2019 年度「数理論理学」講義資料, 南山大学, 2019

[3] 受験の月 学校では教えてくれない受験のための数学・物理・化学,「n≦k のときを仮定する数学的帰納法」, https://examist.jp/mathematics/induction /suugakutekikinouhou-ruiseki/ (参照 2020-11-23)

[4] 森田智洋,「数学的帰納法の形式」, 南山大学数理情報学部数理科学科 2004 年度卒業論文, 南山大学, 2004

$$a_1 = 1 \Rightarrow \downarrow$$
$$a_1 > 0,\ {a_1}^2(a_1 - 1) = 0 \Rightarrow \downarrow$$
$$(\forall 左)$$
$$\uparrow,\ {a_1}^2 = {a_1}^3 \Rightarrow \downarrow$$
$$(\forall 左)$$
$$\uparrow \Rightarrow a_1 = 1$$

$$\uparrow,\ a_{k+1} = k + 1 \Rightarrow \downarrow$$
$$\uparrow,\ a_{k+1} > 0 \Rightarrow \downarrow$$
$$(\forall 左)$$
$$\uparrow,\ a_{k+1}(a_{k+1} + k)\{a_{k+1} - (k + 1)\} = 0 \Rightarrow \downarrow$$
$$(略)$$
$$\uparrow,\ (1 + 2 + \cdots + k + a_{k+1})^2 = 1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 + {a_{k+1}}^3 \Rightarrow \downarrow$$
$$\uparrow,\ a_1 = 1, \ldots, a_k = k \Rightarrow \downarrow$$
$$(\forall \rightarrow 左)$$
$$\uparrow,\ (a_1 + a_2 + \cdots + a_{k+1})^2 = {a_1}^3 + {a_2}^3 + \cdots + {a_{k+1}}^3 \Rightarrow \downarrow$$
$$\uparrow,\ \forall n(n \leq k \rightarrow a_n = n) \Rightarrow a_{k+1} = k + 1$$

$$(\mathrm{MI})$$
$$\forall n(a_n > 0),\ \forall n((a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 = {a_1}^3 + {a_2}^3 + \cdots + {a_n}^3) \Rightarrow \forall n(a_n = n)$$

図 2：分析 2 の証明図