形式体系を用いた証明法の比較

2017SS025 神川留奈
指導教員：佐々木克巳

1 はじめに

3 年次のシステム数理実習の授業で，証明文を形式体系における証明図を用いて表現できることを知り，多くの証明文を証明図で表現してみたいと思った．本研究は，1 つの命題には，複数の証明法で証明できる場合もあることに注目した．本研究の目的は，複数の証明法で証明できる命題に対し，その証明法による証明図を比較し，各証明法の理解を深めることである．具体的な証明法は，背理法を用いた証明，対偶の性質を用いた証明，どちらも用いない証明などである．そして，比較は，どれが分かりやすい証明であるか，発想がしやすい証明であるか，簡潔な証明であるかなどの視点で行う．また，形式体系はシークエントに基づく体系を用い，証明図はシークエント体系の証明図を用いる．

本研究では，19 個の命題の証明を考察し，その代表的な 7 個について，考察をまとめた．本稿では，その 7 個のうち 2 個について述べる．2 節でシークエントと証明図を導入し，3 節でその 2 個の考察を行う．

2 シークエントと証明図

この節では佐々木[1], [2]に従い，シークエントと，その変化の過程を表す図式（証明図）を導入する．

2.1 シークエント

n + 1 個の述語 $P, P_1, \cdots, P_n$ に対し，表現

$$P_1, \cdots, P_n \Rightarrow P$$

をシークエントという(n = 0,1,2,・・・)．“$P_1, \cdots, P_n$” をこのシークエントの左辺，P を右辺という(n = 0 のとき，左辺は空列を表す)．シークエントの左辺において，述語の重複と順番は，異なっていても区別しないとする．たとえば，次の 3 つのシークエント

$$P_1, P_2 \Rightarrow P \qquad P_1, P_1, P_2 \Rightarrow P \qquad P_2, P_1 \Rightarrow P$$

はすべて同じとみなす．シークエントの意味は，「左辺に現れる述語から右辺の述語が導かれる」である．証明の構想においては，左辺が「使える性質の列」，右辺は「導きたい性質」となる．本研究では，次の記号を適宜用いる．

$\bot$(矛盾)，$\wedge$(かつ)，$\vee$(または)，$\neg$(否定)

また「x は有理数である」を「$x \in \mathbb{Q}$」と表す．

2.2 証明図

証明は推論を繰り返し構成される．故に，証明における各推論をシークエントの変化で表現できれば，証明もシークエントの変化で表現できる．以後，n 個のシークエント $S_1, \cdots, S_n$ からシークエント S への変化を

$$\frac{S_1 \cdots S_n}{S}$$

と表現し，これを推論規則という．各 S_i をこの推論規則の上式，S を下式という．2 つの推論規則 $\frac{S_2}{S_1}$ $\frac{S_4}{S_3}$ の下式 S_1, S_3 が別の推理規則 $\frac{S_5\ S_6}{S}$ の上式 S_5, S_6 とそれぞれ等しいとき

$$\frac{\dfrac{S_2}{S_1} \quad \dfrac{S_4}{S_3}}{S}$$

のように上に積み上げることができる．正しいと認められた推論規則を積み上げていき，正しいと認められたシークエントに到達した図式を証明図という．本研究で正しいと認めた推論規則の例をあげる．また，整数や演算の性質などで一般的に正しいと認めているものは，本稿でも正しいと認めることにする．ここで，(RAA)は背理法を表す．

$$\frac{P, \Gamma \Rightarrow R \quad Q, \Gamma \Rightarrow R}{P \vee Q, \Gamma \Rightarrow R}\ (\vee 左) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow P \quad \Gamma \Rightarrow Q}{\Gamma \Rightarrow P \wedge Q}\ (\wedge 右)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow Q}{P, \Gamma \Rightarrow Q}\ (w 左) \qquad \frac{\neg P, \Gamma \Rightarrow \bot}{\Gamma \Rightarrow P}\ (RAA)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow P \quad \Gamma, P \Rightarrow Q}{\Gamma \Rightarrow Q}\ (cut) \qquad \frac{Q^*, \Gamma \Rightarrow P^*}{P, \Gamma \Rightarrow Q}\ (対偶の性質)$$

証明図を簡潔に表現するために，証明図の各推論規則において，上式の左辺では下式左辺の部分列を“↑”で表してもよいとし，上式右辺と下式右辺が一致する場合，上式右辺を“↓”で表してもよいとする．また，証明図における(w 左)は適宜省略する．

3 証明の考察

この節では，この研究で対象とした命題のうち，[3], [4]から抽出した 2 つの命題に対して，その複数の証明の証明図を与え，比較・考察する．具体的には，

(1) 命題の記号表現
(2) 証明図(複数)
(3) 比較・考察

の 3 つを示す．

命題1([3]).

(1) 記号表現：$a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Q}, a + b\sqrt{2} = 0 \Rightarrow a = b = 0$

(2) 証明図：3 つの証明図を示す．本研究では，この 3 つの他に対偶の性質を用いた証明図も考察したが，考察の

結果は次の命題と同様であるため，本稿では扱わない.

(2.1) [3]の証明を図式化した証明図:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\uparrow,\sqrt{2}=-\frac{a}{b},-\frac{a}{b}\in\mathbb{Q}\Rightarrow\bot}{\uparrow,\sqrt{2}=-\frac{a}{b}\Rightarrow\downarrow}}{\uparrow,b\neq 0\ \Rightarrow\ \bot}}{\uparrow\ \Rightarrow\ b=0\ (\mathrm{RAA})}\qquad\langle 1\rangle}{a\in\mathbb{Q},b\in\mathbb{Q},\ a+b\sqrt{2}=0\ \Rightarrow\ a=b=0\ (\mathrm{cut})}$$

$$\dfrac{\dfrac{\uparrow,\ \ a=0\Rightarrow\downarrow}{\uparrow\ \Rightarrow\ a=0}\qquad b=0\ \Rightarrow\ b=0}{\uparrow,b=0\ \Rightarrow\ a=b=0\ (\wedge 右)}$$

<1>

(2.2) 一番上で背理法((RAA))を用いた証明図:

※<1>は(2.1)の証明図と同じものとする.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{b\in\mathbb{Q},b\sqrt{2}\in\mathbb{Q},b\neq 0\ \Rightarrow\ \bot}{\uparrow,b\sqrt{2}\in\mathbb{Q}\ \Rightarrow\ b=0\ (\mathrm{RAA})}}{\uparrow,b\sqrt{2}=-a\ \Rightarrow\ b=0}}{a\in\mathbb{Q},b\in\mathbb{Q},a+b\sqrt{2}=0\ \Rightarrow\ b=0}\qquad\langle 1\rangle}{a\in\mathbb{Q},b\in\mathbb{Q},\ a+b\sqrt{2}=0\ \Rightarrow\ a=b=0\ (\mathrm{cut})}$$

(2.3) 一番下で背理法((RAA))を用いた証明図:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{b\in\mathbb{Q},b\neq 0,b\sqrt{2}\in\mathbb{Q}\ \Rightarrow\ \bot}{\uparrow,b\sqrt{2}=-a\Rightarrow\bot}}{\uparrow,a\neq 0\Rightarrow\bot}\qquad\dfrac{\dfrac{b\in\mathbb{Q},b\neq 0,b\sqrt{2}\in\mathbb{Q}\ \Rightarrow\ \bot}{\uparrow,b\neq 0,b\sqrt{2}=-a\Rightarrow\bot}}{\uparrow,b\neq 0\Rightarrow\bot}}{\uparrow,a\neq 0\vee b\neq 0\ \Rightarrow\ \bot\ (\vee 左)}}{a\in\mathbb{Q},b\in\mathbb{Q},\ a+b\sqrt{2}=0\ \Rightarrow\ a=b=0\ (\mathrm{RAA})}$$

(3) 比較・考察:(2.1)，(2.2)，(2.3)は，どれも背理法を用いた自然な証明を表しているが，それを用いるタイミングが異なっている. つまり，背理法は，自然に用いるタイミングが複数あるとわかる. その複数のタイミングの中で，自分の解きやすい方法を見つけ出して証明することができ，使いやすいと考える.

命題 2([4]).

(1) 記号表現:$\Gamma,a+b\sqrt{5}=c+d\sqrt{5}\ \Rightarrow\ a=c\wedge b=d$

ただし，Γ は列 $a\in\mathbb{Q},b\in\mathbb{Q},c\in\mathbb{Q},d\in\mathbb{Q}$を表す.

(2) 証明図:3 つの証明図を示す.

(2.1) [4]の証明を図式化した証明図:

$$\dfrac{\dfrac{\langle 1\rangle\qquad\dfrac{\langle 2\rangle}{\uparrow,a\neq c\ \Rightarrow\ \bot\ (等号の性質)}}{\uparrow,b\neq d\vee a\neq c\ \Rightarrow\ \bot\ (\vee 左)}}{\Gamma,a+b\sqrt{5}=c+d\sqrt{5}\ \Rightarrow\ a=c\wedge b=d\ (\mathrm{RAA})}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{b\neq d,\sqrt{5}=-\dfrac{a+c}{b-d},\sqrt{5}\notin\mathbb{Q},-\dfrac{a+c}{b-d}\in\mathbb{Q}\ \Rightarrow\ \bot}{\uparrow,\sqrt{5}=-\dfrac{a+c}{b-d}\Rightarrow\ \bot}}{\uparrow,(b-d)\sqrt{5}=-a+c\ \Rightarrow\ \bot}}{\uparrow,b\sqrt{5}-d\sqrt{5}=-a+c\ \Rightarrow\ \bot}}{\uparrow,b-d\neq 0\ \Rightarrow\ \bot}}{\uparrow,b\neq d\ \Rightarrow\ \bot\ (等号の性質)}$$

<1>

$$\dfrac{\langle 1\rangle\qquad\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{a\neq c,a=c\ \Rightarrow\ \bot}{\uparrow,0=-a+c\ \Rightarrow\ \bot}}{\uparrow,(b-d)\sqrt{5}=-a+c\ \Rightarrow\ \bot}}{\uparrow,b\sqrt{5}-d\sqrt{5}=-a+c\ \Rightarrow\bot}}{\uparrow,b=d\ \Rightarrow\ \bot}}{\Gamma,\ a+b\sqrt{5}=c+d\sqrt{5},a\neq c\ \Rightarrow\ \bot\ (場合分け)}$$

<2>

(2.2) (cut)を用いて(2.1)の冗長部分を減らした証明図:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{b\neq d,\sqrt{5}=-\dfrac{a+c}{b-d},\sqrt{5}\notin\mathbb{Q},-\dfrac{a+c}{b-d}\in\mathbb{Q}\ \Rightarrow\ \bot}{\uparrow,\sqrt{5}=-\dfrac{a+c}{b-d}\ \Rightarrow\ \bot}}{\uparrow,b\neq d\ \Rightarrow\ \bot}}{\uparrow\ \Rightarrow\ b=d\ (\mathrm{RAA})}\qquad\dfrac{\dfrac{0=-a+c\ \Rightarrow\ a=c}{\uparrow\ \Rightarrow\ a=c}\qquad\uparrow\ \Rightarrow\ b=d}{\uparrow,b=d\ \Rightarrow\ \downarrow\ (\wedge 右)}}{\dfrac{\uparrow,(b-d)\sqrt{5}=-a+c\Rightarrow\ \downarrow\ (\mathrm{cut})}{\dfrac{\uparrow,b\sqrt{5}-\ d\sqrt{5}=-a+c\Rightarrow\ \downarrow}{\Gamma,a+b\sqrt{5}=c+d\sqrt{5}\ \Rightarrow\ a=c\wedge b=d}}}$$

(2.3) 対偶の性質を用いた証明図:

※<1>, <2>は(2.1)の証明図と同じものとする.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\langle 1\rangle}{\uparrow,b\neq d\ \Rightarrow\ \downarrow\ (\mathrm{RAA})}\qquad\dfrac{\dfrac{\langle 2\rangle}{\uparrow,a+b\sqrt{5}=c+d\sqrt{5}\ \Rightarrow\ \bot}}{\uparrow,a\neq c\ \Rightarrow\ \downarrow\ (\mathrm{RAA})}}{\uparrow,b\neq d\vee a\neq c\ \Rightarrow\ a+b\sqrt{5}\neq c+d\sqrt{5}\ (\vee 左)}}{\Gamma,a+b\sqrt{5}=c+d\sqrt{5}\ \Rightarrow\ a=c\wedge b=d\ (対偶の性質)}$$

(3) 比較・考察:(2.2)で場合分けの代わりに(cut)を使うことで，すっきりとした分かりやすい証明図になった. また，(2.3)の対偶の性質を用いた場合は，その後背理法を用いている. これは(2.1)の遠回りした形で，簡潔ではないと考える.

4 おわりに

本研究では，様々な証明を証明図で表現した. 対偶の性質や背理法を用いることで，証明しやすくなることがあり，それらの理解を深めることは有効だと考える. 特に背理法は，対偶の性質を用いることができない命題にも用いることができ，また複数のタイミングで用いることで複数の自然な証明を得ることができ，汎用性が高いことが分かった.

参考文献

[1] 佐々木克巳，2019 年度「数理論理学」講義資料，南山大学，2019

[2] 佐々木克巳，「シークエントによる証明の構想の図式化」，教職センター紀要第 2 号，南山大学教職センター，pp. 46-60，2017

[3] チャート研究所，『新課程　チャート式　基礎からの数学 I＋A』，数研出版株式会社，東京，2014

[4] 俣野博・河野俊丈　ほか 27 名，『数学 I 』，東京書籍株式会社，東京，2014