教科書の行間埋めによる授業構想

−高等学校数学「三角関数」を中心として−

2017SS017 稲見 悠花

指導教員: 佐々木 克巳

1 はじめに

本研究の目的は，高等学校の教科書[1]の行間埋めにより，わかりやすい授業の構想のための材料を集めることである．対象とする単元は，数学II「三角関数」である．この行間埋めの視点は以下の(1)~(7)である．

(1) 目標
(2) 有用性・意義
(3) 既習内容との関係
(4) 教科書の導出過程の補充
(5) よくある誤答などに対する注意
(6) 別解などの発展的考察
(7) その他

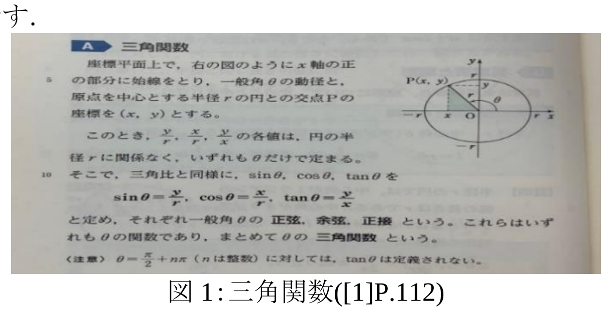
本研究では，対象とする数学 II「三角関数」の行間埋めを，[1]にしたがって「角の拡張」，「三角関数」，「三角関数のグラフ」，「三角関数の性質」，「三角関数の応用」，「三角関数の加法定理」，「加法定理の応用」の 7 つの部分に分けて行った．本稿では，その 2 つ目の「三角関数」を扱う．

2 「三角関数」の行間埋め

この節では，「三角関数」の行間埋めを行う．まず視点(1)による行間埋め，すなわち「三角関数」の目標を整理する．そして，[1]に従って，「三角関数」の冒頭部，「単位円」，「例題 1」，「例題 2」に分けて，それらの行間埋めを行う．それぞれの結果を以下の例 1, 例 2, 例 3, 例 4 に示す．各例では，[1]の引用部を示した後，その行間埋めの結果を視点(2)~(7)に沿って示す．

(1)目標：[2]を参考に，三角関数を学ぶ上での目標を定める．
・三角関数に興味・関心を持ち，性質を活用し，三角関数の値を求めることができる．
・三角関数の定義を理解する．
・単位円の有用性を考察できる．
・三角関数の相互関係を三角比の相互関係の拡張ととらえて考察できる．

例 1. [1]の「三角関数」から 1 つの部分を抽出して図 1 に示す．


A 三角関数

座標平面上で，右の図のように x 軸の正の部分に始線をとり，一般角 θ の動径と，原点を中心とする半径 r の円との交点Pの座標を $(x,\ y)$ とする。

このとき，$\frac{y}{r}$，$\frac{x}{r}$，$\frac{y}{x}$ の各値は，円の半径 r に関係なく，いずれも θ だけで定まる。

そこで，三角比と同様に，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ を

$$\sin\theta=\frac{y}{r},\quad \cos\theta=\frac{x}{r},\quad \tan\theta=\frac{y}{x}$$

と定め，それぞれ一般角 θ の **正弦**，**余弦**，**正接** という。これらはいずれも θ の関数であり，まとめて θ の **三角関数** という。

〈注意〉 $\theta=\frac{\pi}{2}+n\pi$（$n$ は整数）に対しては，$\tan\theta$ は定義されない。

図 1: 三角関数([1]P.112)

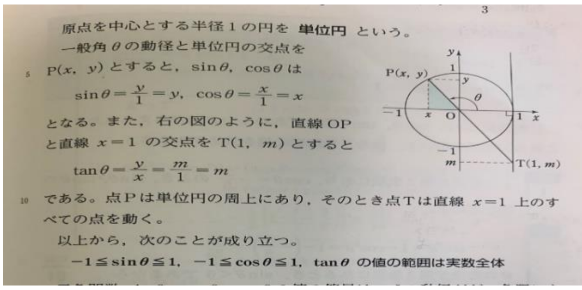
(2)有用性・意義(「(3)既習の内容との関係」も含む)：三角比と三角関数を比較して双方のよさを確認する．三角比は山や木の高さを測るなどの測量で使われる．また，直角三角形の辺の比を定義したものであり，範囲は鋭角である．一方，三角関数は三角比の角の範囲を拡張させ，角度を一般化したものであり，波を表すことができる．携帯やテレビを使う時の電波，音楽などの音波も三角関数により，数式によって表現可能になる．

(4)教科書の導出過程の補充：次を補うとより丁寧な説明になる．
13 行目：

$$\mathrm{cosec}\theta=\frac{r}{y}=\frac{1}{\sin\theta}\ ,\ \sec\theta=\frac{r}{x}=\frac{1}{\cos\theta}\ ,\ \cot\theta=\frac{x}{y}=\frac{1}{\tan\theta}$$

cosecθ, secθ, cotθ をそれぞれ一般角の余割，正割，余接という．これらを割三角関数という．

例 2 [1]の「単位円」から 1 つの部分を抽出して図 2 に示す．


3

原点を中心とする半径 1 の円を **単位円** という。

一般角 θ の動径と単位円の交点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると，$\sin\theta$，$\cos\theta$ は

$$\sin\theta=\frac{y}{1}=y,\quad \cos\theta=\frac{x}{1}=x$$

となる。また，右の図のように，直線 OP と直線 $x=1$ の交点を $\mathrm{T}(1,\ m)$ とすると

$$\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{m}{1}=m$$

である。点Pは単位円の周上にあり，そのとき点Tは直線 $x=1$ 上のすべての点を動く。

以上から，次のことが成り立つ。

$-1\leqq\sin\theta\leqq1$，$-1\leqq\cos\theta\leqq1$，$\tan\theta$ の値の範囲は実数全体

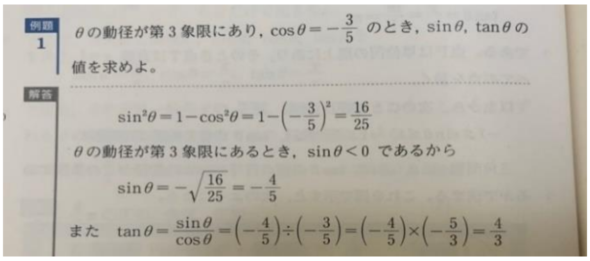
図 2: 単位円([1]P.113)

(2)有用性・意義：単位円を利用する意味を考える．三角比の角の範囲は鋭角である．よって，三角形を利用して角の大きさを考えていた．単位円を利用することで角度が$\frac{\pi}{2}$より大きくなっても円の中で角を表すことができる．

(5)よくある誤答などに対する注意：tan=$\frac{3}{4}$ のとき sinθ と cosθ を求めると，sinθ=3, cosθ=4 と間違える生徒がいるかもしれない．-1≦sinθ≦1, -1≦cosθ≦1 の範囲であることを注意する．

例 3. [1]の P.114「例題 1」から 1 つの部分を抽出して図 3 に示す．

(4)教科書の導入過程の補充：次の 2 つを補うとより丁寧な説明になる．
(4.1)1 行目：『θ の動径は第 3 象限にあるので，sinθ<0, tanθ>0』



例題 1

θ の動径が第 3 象限にあり，$\cos\theta=-\frac{3}{5}$ のとき，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

解答

$$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2=\frac{16}{25}$$

θ の動径が第 3 象限にあるとき，$\sin\theta<0$ であるから

$$\sin\theta=-\sqrt{\frac{16}{25}}=-\frac{4}{5}$$

また　$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\left(-\frac{4}{5}\right)\div\left(-\frac{3}{5}\right)=\left(-\frac{4}{5}\right)\times\left(-\frac{5}{3}\right)=\frac{4}{3}$

図 3: 三角関数の相互関係の例 1[1]P.114)

(4.2)1 行目:『$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より』

(6)別解などの発展的な考察:別解を 2 つ挙げる.
(6.1)tanθ を先に求める別解を挙げる.

別解. θ の動径は第 3 象限にあるので sinθ<0, tanθ>0 である. よって, $1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$ より,

$$\frac{1}{\cos^2\theta}=\frac{1}{(\frac{9}{25})}=\frac{25}{9}$$

$$\tan\theta=\frac{4}{3}$$

である. また, $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より, $\sin\theta=\frac{4}{3}(-\frac{3}{5})=-\frac{4}{5}$
である.

この別解では, $1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$を利用しているため, 分数の分母に分数の 2 乗が現れ, 計算が複雑になる. 相互関係の問題を解くとき, $1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$を使って求めることは避けたほうがよい.

(6.2)単位円と三平方の定理を利用した別解を挙げる.
別解.

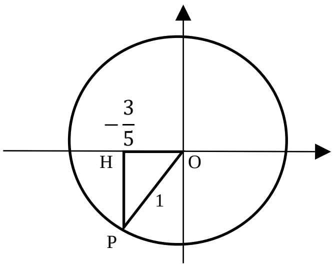


図 4: 例題 1 の単位円

図 4 のように動径 OP, 点 H をとると, 三平方の定理から,

$$PH=\sqrt{1-(-\frac{3}{5})^2}=\frac{4}{5}$$

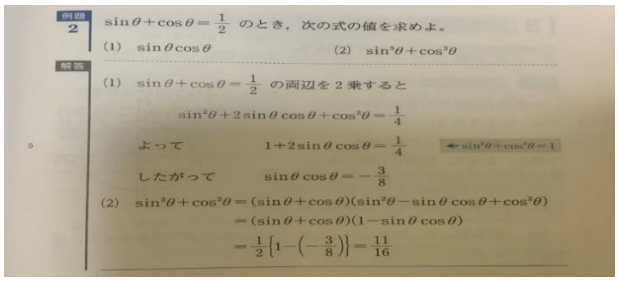
である. θ は第 3 象限にあるので, P の座標は$(-\frac{3}{5},\ -\frac{4}{5})$であり,

$$\sin\theta=-\frac{4}{5},\ \tan\theta=\frac{4}{3}$$

である.

この別解は教科書の解法と似ているが, 教科書が三角関数の相互関係$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ を利用しているのに対し, この別解は三平方の定理を利用している. つまり, これらの違いを意識することで, その相互関係が三平方の定理の特別の場合であることを振り返ることができる.

例 4. [1]の P.115 の「例題 2」から 1 つの部分を抽出して図 5 に示す.



例題 2

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{2}$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1) $\sin\theta\cos\theta$　　(2) $\sin^3\theta+\cos^3\theta$

解答

(1) $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{2}$ の両辺を 2 乗すると

$$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{4}$$

よって　$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$　　← $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

したがって　$\sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{8}$

(2) $\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$
$=(\sin\theta+\cos\theta)(1-\sin\theta\cos\theta)$
$=\frac{1}{2}\left\{1-\left(-\frac{3}{8}\right)\right\}=\frac{11}{16}$

図 5: 三角関数の相互関係の例 2([1]P.115)

(6)別解などの発展的考察:生徒の理解を深めるための応用問題として次の 2 つを追加する.

応用問題4.1. θ が例題2の条件を満たすとき, sinθ-cosθ の値を求めよ.
解答例.
sinθ-cosθ を 2 乗すると,

$$(\sin\theta-\cos\theta)^2=1-2(-\frac{3}{8})=1+\frac{3}{4}=\frac{7}{4}$$

である. よって $\sin\theta-\cos\theta=\pm\frac{\sqrt{7}}{2}$である.

なお, この問題では θ の範囲が指定されていないので, sinθ-cosθ の符号は判断できない.

応用問題 4.2. θ が例題 2 の条件を満たすとき, $\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\pi$ の範囲での sinθ, cosθ の値を求めよ.
解答例.
$\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\pi$ から sinθ>0, cosθ<0 である. 与式と応用問題 4.1 で得られた $\sin\theta-\cos\theta=\pm\frac{\sqrt{7}}{2}$の和と sinθ>0 から

$$\sin\theta=\frac{1+\sqrt{7}}{4}$$

である. 与式に $\sin\theta=\frac{1+\sqrt{7}}{4}$を代入すると,

$$\cos\theta=\frac{1}{2}-\frac{1+\sqrt{7}}{4}=\frac{1-\sqrt{7}}{4}$$

である. これは cosθ<0 を満たす.
よって, $(\sin\theta,\ \cos\theta)=(\frac{1+\sqrt{7}}{4},\ \frac{1-\sqrt{7}}{4})$である.

3 おわりに

この単元では, 既習の三角比とのつながりを意識しながら, 授業を進めることが大切であると思った. 公式や性質を多く利用するので, それらを独立に考えるのではなく, 三平方の定理から相互関係を導く, 加法定理から 2 倍角・半角の公式を導き出すといった性質と性質の関係からの理解により定着度を高めることも必要であると思った.

参考文献

[1] 岡部恒治, 他 17 名,『高等学校数学II』, 数研出版, 東京, 2011
[2] 文部科学省,『高等学校学習指導要領(平成 30 年告示)解説 数学編 理数編』, 学校図書, 東京, 2019