様相論理とクリプキ意味論

2017SS006 権田凱亜

指導教員：佐々木克巳

1 はじめに

佐野他 [1] では，様相論理と証明可能性論理を扱っている．本研究は，その中の第 1 章「正規様相論理の構文論・意味論・ヒルベルト式公理系」の理解を目的とする．具体的には，そこで紹介されている定理や性質を，シークエントの手法などを用いてより詳しく表現することで理解を深める．いくつかの証明は，シークエントを基本単位とした証明で表現し，卒業論文の付録 (pp. 27–52) に示している．本稿では，第 1 部第 1 章において，強完全性定理を示すときに用いる命題 1.3.6 について詳しく述べる．強完全性定理は，構文論と意味論の同値を示す重要な性質である．2 節では，命題 1.3.6 を述べるための準備を行う．

2 準備

この節では，3 節の準備を [1] にしたがって行う．具体的には 2.1 節で様相論理の論理式を，2.2 節で真理値を定めるためのフレームとモデルを，2.3 節で正規様相論理を導入し，2.4 節では命題 1.3.6 を記述するために必用な定義を示す．

2.1 様相論理の論理式

この節では様相論理の論理式を導入する．様相論理の言語を，命題変数の可算無限集合 $\texttt{Prop} = \{p, q, r, ...\}$，命題結合子 $\bot$, $\to$，様相演算子 $\Box$ の語彙で定める．言語上の論理式の全集合 $\texttt{Form}$ を

$$\texttt{Form} \ni \varphi ::= p \mid \bot \mid \varphi \to \varphi \mid \Box\varphi \quad (p \in \texttt{Prop})$$

と定める．ここでは，$\neg\varphi := \varphi \to \bot$, $\varphi \vee \psi := (\neg\varphi) \to \psi$, $\Diamond\varphi := \neg\Box\neg\varphi$ のように略記を用いる．

2.2 フレームとモデル

この節では 2.1 節の論理式に真理値を定めるためのフレームとモデルを導入する．

空でない集合 W とその上の二項関係 $R \subseteq W \times W$ の対 $F = (W, R)$ をフレームといい，R をこのフレーム到達可能関係という．

モデルとはフレーム (W, R) と W 上の付値関数 $V : \texttt{Prop} \to \wp(W)$ の対であり（$\wp(W) = \{X | X \subseteq W\}$），$M, N$ などで表す．任意のモデル $M = (W, R, V)$，任意の $w \in W$，任意の論理式 φ に対して，**充足関係** $M, w \models \varphi$（φ は M の w で真である）を次のように定義する：

$$\begin{array}{lll} M, w \models p & \Leftrightarrow & w \in V(p) \\ M, w \not\models \bot & & \\ M, w \models \varphi \to \psi & \Leftrightarrow & M, w \not\models \varphi \text{ あるいは } M, w \models \psi \\ & (\Leftrightarrow & M, w \models \varphi \text{ ならば } M, w \models \psi) \\ M, w \models \Box\varphi & \Leftrightarrow & wRv \text{ なる任意の } v \in W \text{ について} \\ & & M, v \models \varphi \end{array}$$

また，任意の $w \in W$ に対して $M, w \models \varphi$ となることを $M \models \varphi$ と表し，任意の V に対して，$(F, V) \models \varphi$ となることを，$F \models \varphi$ と表す．さらに，論理式の集合 Γ が与えられたとき，任意の $\varphi \in \Gamma$ に対して $F \models \varphi$ となることを $F \models \Gamma$ と表す．

2.3 正規様相論理

この節では，正規様相論理を導入する．論理式の集合 Λ が表 1 のすべての公理，さらに，すべての推論規則に閉じている場合，Λ を正規様相論理という．$\varphi \in \Lambda$ となることを $\vdash_\Lambda \varphi$ と書く．最小の正規様相論理を $\mathbf{K}$ で表す．表 2 の公理と推論規則は，$\mathbf{K}$ のヒルベルト式の公理系と呼ばれる．

表 1 様相論理 $\mathbf{K}$ のヒルベルト式公理系 H($\mathbf{K}$)

公理系	
Taut	命題トートロジー
K	$\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$
推論規則	
分離則 MP	φ と $\varphi \to \psi$ から ψ を導く
一様代入則 US	φ から $\overline{\sigma}(\varphi)$ を導く，σ は命題変数への一様代入．
必然化則 Nec	φ から $\Box\varphi$ を導く

2.4 必要な定義

この節では，命題 1.3.6 を記述するために必用な定義を示す．

定義 1.3.1 正規様相論理 Λ 上の**導出関係** $\Gamma \vdash_\Lambda \varphi$ は，ある有限集合 $\Delta \subseteq \Gamma$ に対して $\bigwedge\Delta \to \varphi \in \Lambda$ により定める（$\bigwedge\Delta$ は Δ の要素すべての連言，Δ が空集合の場合は $\bigwedge\Delta := \top$ と定める）．

定義 1.3.2 論理式 φ が論理式の集合 Γ からの $\mathbb{F}$ **帰結**である（$\Gamma \models_{\mathbb{F}} \varphi$ と表記）のは，任意のフレーム $F = (W, R) \in \mathbb{F}$，任意の付値関数 V，任意の $w \in W$ に対して，$(F, V), w \models \Gamma$ ならば $(F, V), w \models \varphi$ が成立する場合である．

定義 1.3.3 正規様相論理 Λ がフレームクラス $\mathbb{F}$ に対して**強完全**であるのは，論理式の集合 $\Gamma \cup \{\varphi\}$ に対して $\Gamma \models_{\mathbb{F}} \varphi$ ならば $\Gamma \vdash_\Lambda \varphi$ となる場合である．

定義 1.3.4 Λ を正規様相論理，Γ を論理式の集合としたとき Γ が Λ **矛盾**であるのは，$\Gamma \vdash_\Lambda \bot$ となる場合である．Γ が Λ **無矛盾**であるのは Γ が Λ 矛盾ではない，すなわち，任意の有限集合 $\Delta \subseteq \Gamma$ に対して $\nvdash_\Lambda \bigwedge\Delta \to \bot$ となる場合である．

定義 1.3.5 Γ がフレーム $F = (W, R)$ で**充足可能**であるのは，ある付値関数 $V : \mathsf{Prop} \to \wp(W)$，ある $w \in W$ が存在して $(F, V), w \models \Gamma$，すなわち Γ の全要素が (F, V) の

w で真となる場合である．Γ がフレームクラス $\mathbb{F}$ で**充足可能**であるのは，あるフレームクラス $F \in \mathbb{F}$ が存在して Γ が F で充足可能となる場合である．

3　命題 1.3.6

この節では [1] における命題 1.3.6 の証明を行う．

命題 1.3.6　正規様相論理 Λ に対して次の 2 条件は同値である．

(1) Λ がフレームクラス $\mathbb{F}$ に対して強完全である．

(2) 任意の論理式の集合 Γ に対して Γ が Λ 無矛盾ならば Γ は $\mathbb{F}$ で充足可能である．

この証明は [1] では以下の (i)，(ii) から導かれることのみが述べられている．本研究では，この証明を次のように補った．

証明　まず，論理式の集合 $\Gamma \cup \{\varphi\}$ に対して，次の二つの同値性を示す．

(i)　$\Gamma \not\models_{\mathbb{F}} \varphi \Longleftrightarrow \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ が $\mathbb{F}$ で充足可能である．

(ii)　$\Gamma \not\vdash_{\Lambda} \varphi \Longleftrightarrow \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ が Λ 無矛盾である．

(i) を示す．

　$\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ が $\mathbb{F}$ で充足可能

$\Leftrightarrow$　あるフレーム $F \in \mathbb{F}$ とある付値関数 V と
　　ある $w \in W$ が存在して $M, w \models \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$

$\Leftrightarrow$　あるフレーム $F \in \mathbb{F}$ とある付値関数 V と
　　ある $w \in W$ が存在して $M, v \models \Gamma$かつ $M, w \models \neg\varphi$

$\Leftrightarrow$　あるフレーム $F \in \mathbb{F}$ とある付値関数 V と
　　ある $w \in W$ が存在して $M, v \models \Gamma$かつ $M, w \not\models \varphi$

$\Leftrightarrow$　$\Gamma \not\models_{\mathbb{F}} \varphi$

(ii) を示す．

　$\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ がΛ無矛盾

$\Leftrightarrow$　$\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \not\vdash_{\Lambda} \bot$

$\Leftrightarrow$　$\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ の任意の有限部分集合Δに対して

$$\not\vdash_{\Lambda} \bigwedge \Delta \to \bot \qquad (*1)$$

　$\Gamma \not\vdash_{\Lambda} \varphi$

$\Leftrightarrow$　Γの任意の有限部分集合Δ^*に対して $\not\vdash_{\Lambda} \bigwedge \Delta^* \to \varphi$

となるので，一番下の文を (*2) とおくと (*1) $\Leftrightarrow$ (*2) を示せばよい．

(*1) $\Rightarrow$ (*2) を示す．

$\neg\varphi \in \Delta$ のとき，$\Delta - \{\neg\varphi\} \subseteq \Gamma$ である．また，

$$\begin{aligned} \not\vdash_{\Lambda} \bigwedge \Delta \to \bot \Rightarrow \;& \not\vdash_{\Lambda} (\bigwedge \Delta - \{\neg\varphi\}) \wedge \neg\varphi \to \bot \\ \Rightarrow \;& \not\vdash_{\Lambda} (\bigwedge \Delta - \{\neg\varphi\}) \to \varphi \end{aligned}$$

であるから Δ^* として $\Delta - \{\neg\varphi\}$ を考えると (*2) が成立するとわかる．

$\neg\varphi \notin \Delta$ のとき，$\Delta \subseteq \Gamma$ である．

$$\not\vdash_{\Lambda} \bigwedge \Delta \to \bot \Rightarrow \;\not\vdash_{\Lambda} \bigwedge \Delta \to \varphi \quad (\because\; \vdash_{\Lambda} \bot \to \varphi)$$

であるから，Δ^* として Δ を考えると (*2) が成立することがわかる．

(*2) $\Rightarrow$ (*1) を示す．$\Delta^* \cup \{\neg\varphi\} \subseteq \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ である．また，

$$\begin{aligned} & \not\vdash_{\Lambda} \bigwedge \Delta^* \to \varphi \\ \Rightarrow \;& \not\vdash_{\Lambda} (\bigwedge \Delta^*) \wedge \neg\varphi \to \bot \\ \Rightarrow \;& \not\vdash_{\Lambda} \bigwedge (\Delta^* \cup \{\neg\varphi\}) \to \bot \end{aligned}$$

であるから Δ として $\Delta^* \cup \{\neg\varphi\}$ を考えると (*1) が成立することがわかる．

さらに，次の 2 つの同値性を示す．

(iii)　$\Gamma \cup \{\neg\bot\}$ が Λ 無矛盾 $\Longleftrightarrow \Gamma$ が Λ 無矛盾．

(iv)　$\Gamma \cup \{\neg\bot\}$ が $\mathbb{F}$ が充足可能 $\Longleftrightarrow \Gamma$ が $\mathbb{F}$ で充足可能．

(iii) を示す．

$$\begin{aligned} \Gamma \cup \{\neg\bot\} \text{ が } \Lambda \text{ 無矛盾} &\Leftrightarrow \Gamma \cup \{\neg\bot\} \not\vdash_{\Lambda} \bot \\ &\Leftrightarrow \Gamma \not\vdash_{\Lambda} \bot \\ &\Leftrightarrow \Gamma\text{が}\Lambda\text{無矛盾} \end{aligned}$$

(iv) を示す．

　$\Gamma \cup \{\neg\bot\}$ が $\mathbb{F}$ で充足可能

$\Leftrightarrow$　あるフレーム $F \in \mathbb{F}$ とある付値関数 V と
　　ある $w \in W$ に対して $M, w \models \Gamma \cup \{\neg\bot\}$

$\Leftrightarrow$　あるフレーム $F \in \mathbb{F}$ とある付値関数 V と
　　ある $w \in W$ に対して $M, w \models \Gamma$

$\Leftrightarrow$　Γが $\mathbb{F}$ で充足可能

(i)〜(iv) を用いて命題を示す．

(1)　$\Leftrightarrow$　$\Gamma \cup \{\varphi\}$ に対して$\Gamma \models_{\mathbb{F}} \varphi$ ならば$\Gamma \vdash_{\Lambda} \varphi$

　$\Leftrightarrow$　$\Gamma \cup \{\varphi\}$ に対して$\Gamma \not\models_{\Lambda} \varphi$ ならば$\Gamma \not\models_{\mathbb{F}} \varphi$

　$\Leftrightarrow$　$\Gamma \cup \{\varphi\}$ に対して$\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ がΛ無矛盾ならば
　　$\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ が $\mathbb{F}$ で充足可能　　$(\because$ (i)(ii))

であるから，一番下の文を (3) とおくと (2) $\Leftrightarrow$ (3) を示せばよい．

(3) $\Rightarrow$ (2) を示す．(3) の φ に $\bot$ を代入し，(iii)，(iv) を用いると (2) を得る．

(2) $\Rightarrow$ (3) を示す．任意の Γ と φ が与えられたとき，(2) において Γ に $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ を代入すると，『$\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ が Λ 無矛盾ならば $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ が $\mathbb{F}$ で充足可能』を得るので (3) を得る．

4　おわりに

本研究の証明はどれも複雑なものであったが，シークエントを基本単位とする証明図を意識することで，次の推論を適切に選択しながら証明を進めていくことができた．この経験を通して，シークエントを基本単位として証明を進めることの有用性を実感することができた．

参考文献

[1] 佐野勝彦・倉橋太志・薄葉季路・黒川英徳・菊池誠，『数学における証明と真理　様相論理と数学基礎論』，共立出版，東京，2016