誤答分析と数学教育

2017SE044 益田慎也
指導教員：佐々木克巳

1　はじめに

本研究の目的は，予想される生徒の誤答を分析し，その結果を数学教育に繋げることである. より具体的には，誤答の原因を明らかにすること，および，同様の誤答をくり返さないための指導法の考察などを行う. この分析・考察は問題の目標や既習の内容などをふまえて行い，指導法の考察は，視覚化と単純化の視点で行う.

対象とする単元は，高等学校数学の「場合の数と確率」とした. 誤答のもとになる問題は，数研出版の教科書[1]の 12 題を抽出し，誤答例は，自身の経験などをもとに挙げた．本稿では，その 12 題のうちの 5 題について述べる.

2　誤答分析の例

この節では，[1]から抽出した 5 題に対し，誤答分析を行った結果を示す. 具体的には，各問題に対して，考えられる誤答例を挙げて，その原因を明らかにすること，および，そのような誤解をくり返さないための指導法の考察などを，問題の目標と既習の内容をふまえて行う. つまり，その分析・考察は. 問題ごとに

(1)問題
(2)問題の目標
(3)既習の内容
(4)誤答例
(5)分析・考察

の 5 つに分けて行う.

以下，誤答分析の例を 5 個の問題ごとに示す.

例 2.1.
(1)問題：図 2.1 に示す.

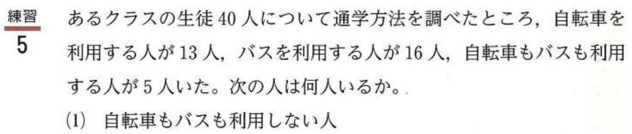

練習 5　あるクラスの生徒 40 人について通学方法を調べたところ，自転車を利用する人が 13 人，バスを利用する人が 16 人，自転車もバスも利用する人が 5 人いた。次の人は何人いるか。
(1)　自転車もバスも利用しない人

図 2.1:[1]P.9 の練習 5(1)

(2)問題の目標：ド・モルガンの法則を理解し，利用できる.
(3)既習の内容：和集合の要素の個数，補集合の要素の個数，ド・モルガンの法則
(4)誤答例：(自転車もバスも利用しない人数)
=(全人数)-(自転車もバスも利用する人数)=40-5=35
(5)分析・考察：誤答例の 1 つ目の等号が間違っている. 40 人の集合を U，自転車を利用する人の集合を A，バスを利用する人の集合を B として，誤答例を記述すると，

$$n(\bar{A}\cap\bar{B})=n(U)-n(A\cap B)=40-5=35$$

となるので，1 つ目の等式が間違っていることが明確になる. ド・モルガンの法則の

$$\bar{A}\cap\bar{B}=\overline{A\cup B}$$

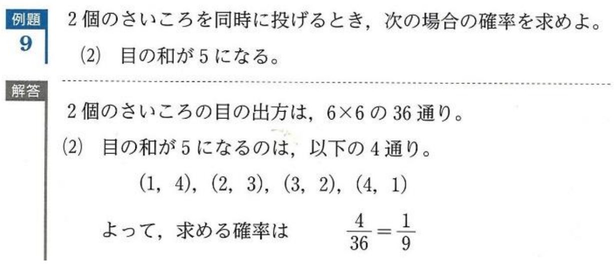
の右辺の∪を∩と誤解したと考えると，

$$n(\bar{A}\cap\bar{B})=n(\overline{A\cup B})=n(U)-n(A\cap B)$$

となるので，その∩と∪の誤解が誤答の原因と考える.

このような誤解が起こらないように，ベン図により視覚化してド・モルガンの法則を理解することが有効と考える.

例 2.2.
(1)問題：図 2.2 に示す.


例題 9　2 個のさいころを同時に投げるとき，次の場合の確率を求めよ。
(2)　目の和が 5 になる。

解答　2 個のさいころの目の出方は，6×6 の 36 通り。
(2)　目の和が 5 になるのは，以下の 4 通り。
(1，4)，(2，3)，(3，2)，(4，1)
よって，求める確率は　$\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$

図 2.2:[1]P.33 の例題 9

(2)問題の目標：同様に確からしい根元事象を判定して確率を求める.
(3)既習の内容：次の性質 1
性質 1．根元事象が同様に確からしい試行において，

$$\text{事象 A の起こる確率}=\frac{\text{事象 A の起こる場合の数}}{\text{起こりうるすべての場合の数}}$$

(4)誤答例：$\frac{6}{(6\times5)/2+6}=\frac{2}{7}$
(5)分析・考察：上の誤答の原因の 1 つは，例えば，(1,4)と(4,1)を区別していないことと考える. この区別をしないと，2 つのさいころの目の出方は 36 通りでなくて，(6×5) / 2＋6　通りで，上の誤答の左辺の分母と一致する. ここでは，(1,4)と(4,1)を区別しなければならない理由を説明する必要がある. その理由は，例えば，この区別をしないとき，2 つの根元事象(1,4)と(4,1)は「同様に確からしい」とはいえないことである.

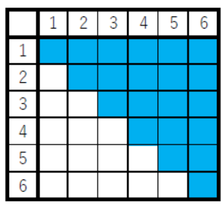


図 2.3:さいころの表

このことは，図 2.3 により，視覚的に理解できると考える. その区別がないときに図 2.3 に表れる(1,1),(1,4),(4,1)などの 36 個の根元事象は，同様に確からしいので，区別をしないときの(1,1)と(1,4)は同様に確からしいとはいえないことがわかると考える.

また，上の誤答の別の原因として，図 2.3 の色付き部分のみをみている可能性もあると考える. この場合も，図 2.3

により，不足があることに気付かせられると考える．

例 2.3.

(1)問題：図 2.4 に示す例 13 の確率を求める問題を考える．

例 13　1 から 5 までの番号札 5 枚を，でたらめに横 1 列に並べるとき，左端または右端が奇数である確率を求める。

図 2.4:[1]P.40 の例 13

(2)問題の目標：2 つの事象が互いに排反でないときの和事象の確率を求める．

(3)既習の内容：集合の要素の個数，順列，性質 1

(4)誤答例：$\frac{3\times4!}{5!}+\frac{3\times4!}{5!}=\frac{6}{5}$

(5)分析・考察：上の誤答の原因は，左端が奇数という事象と右端が奇数という事象が互いに排反だと誤解していることと考える．

このような誤解が起こらないように，ベン図(図 2.5)もしくは対応表(図 2.6)によって可視化することを考える．これらの図より，2 つの事象の関係が明確になり，その後の正しい立式に繋がると考える．

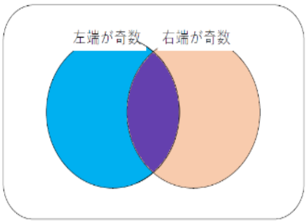


図 2.5:ベン図

右端 ＼ 左端	奇数	偶数
奇数	(奇，奇)	(奇，偶)
偶数	(偶，奇)	(偶，偶)

図 2.6:対応表

なお，この誤答では，確率が 1 を超えていることからも誤答であることに気付くことができる．

例 2.4.

(1)問題：図 2.7 に示す．

1　6 個の数字 0，1，2，3，4，5 を 1 個ずつ使って，3 桁の整数を作る。
(1)　偶数は何個作れるか。

図 2.7:[1]P.53 の章末問題 1(1)

(2)問題の目標：0 を含む数字から作られる整数の個数を求める．

(3)既習の内容：順列，補集合

(4)誤答例：2 つの誤答例を挙げる．

(4.1)(総数)÷2=5×5×4÷2=50

(4.2)(総数)÷2=6×5×4÷2=60

(5)分析・考察：上の 2 つの誤答の共通の原因は，求める偶数の個数が総数の半分と誤解してしまったことと考える．さらに(4.2)には，総数の求め方にも誤答の原因がある．例えば「012」のような「0」を百の位に入れた表現も 3 桁の整数として認めてしまっている．

このような誤解が起こらないように，4 つの数字 0,1,2,3 で 2 桁の整数を作ってみる．すると，

10,12,13,20,21,23,30,31,32

の 9 個で，このうち偶数は 5 個，奇数が 4 個だから，偶数の個数は総数の半分ではない．一の位で分けると，一の位が 0 の整数は 3 個で，一の位が 1,2,3 の整数は各 2 個であり，一の位が 0 の整数が，一の位が他の数字の整数より多い．これらのことが，奇数と偶数の個数の違いに影響を与えているとわかる．

例 2.5.

(1)問題：図 2.8 に示す．

3　0000 から 9999 までの番号のうちで，次のような番号は何個あるか。
(2)　1248 のように，異なる数字が左から小さい順に並んでいるもの

図 2.8:[1]P.53 の章末問題 3(2)

(2)問題の目標：組合せの考え方を理解する．

(3)既習の内容：組合せの総数，順列の総数

(4)誤答例：3 つの誤答例を挙げる．

(4.1)10×9×8×7=5040

(4.2)7×7×7×7=2401

(4.3)7×6×5×4=840

(5)分析・考察：(4.1)の原因は，条件「小さい順」を考慮していないことと考える．例えば 5924 のような小さい順になっていないものも数えられている．

(4.2)は，例えば，小さい順であることから，一番左に 7,8,9 が入らないなどの考慮がされたと考える．しかし，例えば「6676」のような同じ数字も含むものも数えられている．

(4.3)は，(4.2)の考え方に(4.1)の考え方も含めたような解答であると考える．例えば「6348」のような左から小さい順になっていないものも数えられている．

上の 3 つの誤答は，小さい順に並べた順列の総数が，組合せの総数と同じであることを理解することにより避けられると考える．その理解のために，例えば，4 つの数字 1,2,3,4 から，3 つを選んで小さい順に並べる順列と，3 つを選ぶ組合せを比較してみる．結果，表 2.9 の通り，どちらも，同じ順列の集合に対応づけができて，その総数が同じであることが確認できる．

表 2.9：小さい順に並べた順列と組合せ

小さい順に並べた順列	組合せ	対応する順列の集合
(1,2,3)	{1,2,3}	{(1,2,3),(1,3,2),(2,1,3),(2,3,1),(3,1,2),(3,1,2)}
(1,2,4)	{1,2,4}	{(1,2,4),(1,4,2),(2,1,4),(2,4,1),(4,1,2),(4,1,2)}
(1,3,4)	{1,3,4}	{(1,3,4),(1,4,3),(3,1,4),(3,4,1),(4,1,3),(4,1,3)}
(2,3,4)	{2,3,4}	{(2,3,4),(2,4,3),(3,2,4),(3,4,2),(4,2,3),(4,2,3)}

3　おわりに

視覚化と単純化の視点で考察してきた．今後，授業を行う機会があれば，このような例を挙げて誤答をくり返さないような教育をしていきたい．

参考文献

[1]　岡部恒治 他 17 名,『高等学校　数学 A』, 数研出版，東京，2014