# 図形問題の発展的考察
## −複数の解法の共通性に注目して−

2017SE026 岩田 徹志
指導教員: 佐々木 克巳

## 1 はじめに.

3 年次のソフトウェア工学演習の授業で, 図形問題の発展的考察を行った. その中で複数の解法を発案し解法の共通性を見つけ, それぞれの解法のよさを比較することに興味を持った.

本研究の目的は, [1], [2]の中学受験で使われた問題に対し, 複数の解法を発案し, それらの共通性に注目することにより, もとの問題を発展的に考察することである.

本研究では, [1]から 2 題, [2]から 1 題抽出した合計 3 題の発展的考察を行った. 本稿では[1]の 2 題に対する発展的考察の結果を示す. その 2 題は具体的には次の問題 1 と問題 2 である.

問題 1. 図 1.1 のように, 正六角形 ABCDEF の内側に点 P をとり, 6 つの頂点と P をそれぞれ直線で結びます. 三角形 ABP, CDP, EFP の面積がそれぞれ $3cm^2$, $5cm^2$, $8cm^2$であるとき, 三角形 BCP の面積は□$cm^2$です.

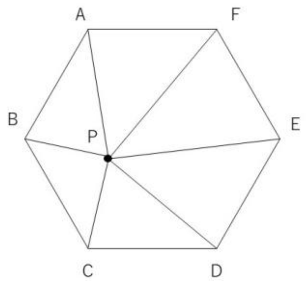


**図 1.1 : 正六角形 ABCDEF**

問題 2. 下の図 1.2 は, 1 辺の長さが 12cm の正方形 ABCD と, それぞれの辺を 3 等分する点を 1 つおきに結んでできる図形です. このとき, 斜線部分の八角形の面積は□です.

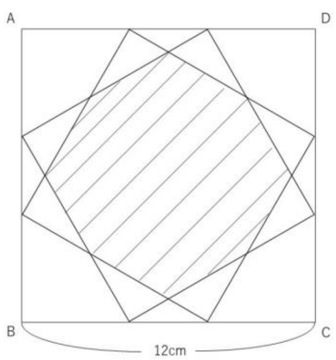


**図 1.2 : 正方形 ABCD**

2 節と 3 節で, 上の 2 題の解法の共通性に注目した考察を行う.

## 2 問題 1 の考察

この節では, 問題1の 3 つの解の共通性に注目した考察を行う.

図 2.1 のように正六角形の面積を S , その内側の三角形の面積を△ABP から反時計回りの順に S1, S2, S3, S4, S5, S6 , 辺 AB と辺 CD の延長線上の交点を G, △BCG の面積を y とする.

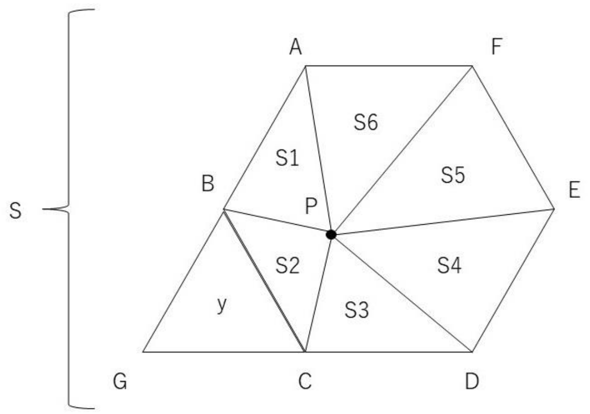


**図 2.1 : 共通性説明に必要な図形の面積**

求めるものは S2 で, S1, S3, S5 が与えられている. これらに関するものを中心に 3 つの解で用いられている主な条件を抽出して(1)~(5)に示す. 3 つの解は, この 5 つの条件のうちの 2 つまたは 3 つを表 2.1 のように用いて, S を求めている. なお, 解 1 が[1]で紹介されているものである.

(1) S1 + S3 = S2 + y
(2) y = S/6
(3) S + 3y = 3(S1 + S3 + S5)
(4) S2 + S5 = S/3 (=S1 + S4= S3 + S6)
(5) S1 + S3 + S5 = S/2 (= S2 + S4 + S6)

**表 2.1**

| 解 | 用いられている性質 |
|---|---|
| 1 | (1), (2), (3) |
| 2 | (1), (2), (4) |
| 3 | (4), (5) |

この 5 つの条件において, S2, y, S がどのように現れるかを考えると,「S2 を求めるためには, (1)または(5)が必要」,「(2), (3)から S と y を求められる」などが分かる. これらなどから, {(2), (3), (4)}と{(1), (2), (5)}と{(1), (3), (5)}での組み合わせでも別解を作成できることがわかる.

また, 5 つの条件について点 P が外部に動いた場合, 正六角形を構成する三角形 S1~S6 のうちすべての辺が外部にある三角形の面積を負の値にすることにより成り立つこともわかった. よって, (1)~(5)の性質の成立, 不成立の確認によってこの問題に対しての理解を深められると考えられる.

## 3　問題 2 の考察

この節では, 問題 2 の 3 つの解の共通性に注目した考察を行う.

図 3.1 のように, 点$A_1 \sim A_4$, 点$B_1 \sim B_4$, 点$C_1 \sim C_4$, 点$D_1 \sim D_4$, AD の中点 E, 正方形の対角線の交点 O, $A_3$から$OD_4$に下ろした垂線の足 H を定める. また, O を原点, D を(6,6)とする座標平面をとり, 求める面積を S とする.

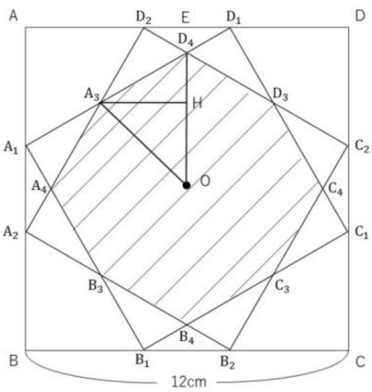


**図 3.1 : 共通性を説明するための点の名前**

本研究で対象とした 3 つの解には, どれも$D_4$の情報を求めて, それを利用して S を求めているという共通点があった. この共通点に注目して, 3 つの解を眺めると, $D_4$の情報を導く方法も, $D_4$の情報から S を求める方法も異なっている. このことから, 3 つの解を, その違いと, 用いている$D_4$の情報の違いから説明できる. 具体的には, 表 3.1~表 3.3 に示す. なお, 解 1 が[1]で紹介されているものである.

**表 3.1 : $D_4$の情報**

| 解 | | $D_4$の情報 |
|---|---|---|
| 1<br>2 | (1a)<br>(2a) | $D_4E = 1$ |
| 3 | | $D_4(0,5)$ |

**表 3.2 : $D_4$の情報を導く方法**

| 解 | | $D_4$の情報を導く方法 |
|---|---|---|
| 1 | (1b) | $\triangle D_4D_1D_2 \backsim \triangle D_4A_1C_2$とその相似比から<br>$D_2D_1 + A_1C_2/D_1D_2 = 4/D_4E$<br>$\Leftrightarrow 4 + 12/4 = 4/D_4E$ |
| 2 | (2b) | $\triangle AA_1D_1 \backsim \triangle ED_4D_1$とその相似比から<br>$AD_1/ED_1 = A_1A/D_4E \Leftrightarrow 8/2 = 4/D_4E$ |
| 3 | (3b) | 直線$C_2D_2$の方程式が y = −1/2x + 5 であることと$D_4$ が y 軸上にあること |

**表 3.3 : $D_4$の情報から S を導く方法**

| 解 | | $D_4$の情報から S を導く方法 |
|---|---|---|
| 1 | (1c) | ・(1a)より$\triangle D_2D_4D_1 = 2cm^2$<br>・$\triangle D_2D_4A_3 = \triangle D_2A_3D_1 - \triangle D_2D_4D_1$<br>・$\triangle D_2A_3D_1 = \triangle AA_1D_1/3 = 16/3 cm^2$<br>・S = 四角形$A_2B_2C_2D_2 - 4 \times \triangle D_2D_4A_3$ |
| 2 | (2c) | ・(2a)より$D_4O = 5cm$<br>・$A_3H : 6 = A_3H : AE = OA_3 : OA$<br>$= OD_4 : OD_4 + AA_1$<br>$= OD_4 : OD_4 + 4$<br>・$S = 8 \times \triangle D_4A_3O = 8 \times D_4O \times A_3H \times 1/2$ |
| 3 | (3c) | ・直線$C_2D_2$の方程式と直線$C_1D_1$の方程式の交点を求めて, $D_3(10/3, 10/3)$<br>・(3a), $D_3(10/3, 10/3)$より,<br>$\triangle D_4A_3D_3 = 50/9 cm^2$<br>・S = 四角形$D_3B_3C_3D_3O + 4 \triangle D_4A_3D_3$ |

表 3.1 の(1a)と(2a)の$D_4E = 1$と(3a)の$D_4(0,5)$は互いに導出可能である. したがって, $D_4$の情報を導く方法は表 3.2 の(1b), (2b), (3b)の 3 通りあり, $D_4$の情報から S を導く方法は(1c), (2c), (3c)の 3 通りある. そのため解法の組み合わせとしては, 3×3 = 9 通りあるということがわかった. ただし, (3c)では(3b)で求めた直線$C_2D_2$の方程式を利用しているため, (3b)と(3c)の組み合わせは(1b)と(3c), (2b)と(3c)の組み合わせより効率がよいといえる.

また, 他の多角形に条件を拡張した場合, (1b)~(3b)から(2a)~(2c)を導くことができ, かつ(1c)~(3c)をすべて利用できたため正三角形は全ての解法を適用できた. 正六角形の場合は(2b)を利用できないため解法 1 と 3 のみ適用できた. ただし, (1b)と(3b)は利用できるため, 解法 2 で利用する(2b)を性質(1b)と(3b)に代替することは可能である. S を求めるための(1c)~(3c)の方法は利用できる. 他の多角形では, (1b)~(3b)が利用できないため解法が全て適用できなかった.

## 4　おわりに

本研究では, 問題に対する解法の共通性を, 中学受験の図形分野について, 解法を分析しながら行った. 研究を行ったことにより, 一つの問題に対して多角的な視点を持って分析する力を養えたと感じている. また, 数学の面白さは解答を導くための方法が複数ある点だと私は考えている. 本研究は, この面白さの具体例になっていると感じている.

## 参考文献


[1] 灘中学校, 灘中の算数 20 年 2021 年度受験用 赤 1902(難関中学シリーズ) , 英俊社, 大阪府, 2021

[2] フェリス女学院中学校, フェリス女学院中学校 2021 年度用 10 年間スーパー過去問 (声教の中学過去問シリーズ) , 声の教育者, 神奈川, 2020