数学オリンピックと数学教育

2017SE011 橋本　銀司
指導教員: 佐々木　克巳

1　はじめに

本研究では, 数学への興味･関心を引くための題材として, 年に一度開催される数学オリンピックの過去の問題を用いることを考えた. 本研究の目的は, 数学オリンピックの過去の問題を分析し, それを数学教育に活かすことである. この分析では, 各問題の解答において, 学校教育で学ぶ定理や性質がどのように組み合わされているかを調べて整理する. そして, 数学教育への応用として, その組み合わせ方から, 問題解決のための技法を抽出すること, および, もとの問題を適切に分割して誘導問題を作成することを行う. これらの技法と誘導問題は, 数学オリンピックの問題をもとにしていることから, 数学への興味･関心を引く効果があると考える.

対象とした問題は, [2]から抽出した 11 題である. 本稿では, そのうちの 2 題について述べる. 2 節では, [2]の 2 題の解答において, 学校教育で学ぶ定理や性質がどのように用いられているかを調べて整理する. 3 節では, 2 節で整理した, 定理や性質の組み合わせ方から, 問題解決のための技法の抽出と, 誘導問題の作成を行う.

2　解答の分析

この節では, [2]の 2 題の解答において, 学校教育で学ぶ定理や性質がどのように用いられているかを調べて整理する.

2.1　用いられた性質

この節では, 2.2 節で扱う問題で用いられた性質をまとめる.

･三角形の内角･外角の性質
･二等辺三角形の性質
二等辺三角形の頂角の二等分線は, 底辺を垂直に 2 等分する.
･直径と円周角の関係
線分 AB を直径とする円の周上に A, B と異なる点 P をとれば, ∠APB=90° である.
･三平方の定理
･三角形の面積の公式
三角形の面積＝底辺×高さ×$\frac{1}{2}$
･円の接線の性質
直線 l, 中心 O の円 C, C 上の点 A に対して
l が A で C に接する ⇔ OA⊥l
･直角三角形の合同条件
･三角形の相似条件
･相似な図形の性質
･合同な図形の性質

2.2　問題と解説

この節では, [2]の 2 題の解答を, 2.1 節でまとめた性質と対応させながら解説する.

問題 1(2003 年　第 6 問). AB=AC=5, BC=6 であるような二等辺三角形 ABC の内部に点 D をとり, 線分 AD を直径とする円と辺 AB, AC との交点をそれぞれ E, F とする. DE=1, DF=2 が成立するとき, 三角形 DBC の面積を求めなさい.

解説. 点 A から辺 BC に下した垂線の交点を M とする(図 1 参照). △ABC は二等辺三角形なので二等辺三角形の性質より, 点 M は BC の中点である. よって, BM＝3 となる. 三平方の定理より, AM＝$\sqrt{AB^2-BM^2}$＝$\sqrt{25-9}=\sqrt{16}$ ＝ 4 となる. 三角形の面積の公式より, △ABC＝BC×AM×$\frac{1}{2}$＝6×4×$\frac{1}{2}$＝12 である.

線分 AD は直径なので, 直径と円周角の関係より, ∠DEA＝∠DFA＝90° である. 三角形の面積の公式より, △ABD＝AB×DE×$\frac{1}{2}$＝5×1×$\frac{1}{2}$=$\frac{5}{2}$, △ACD＝AC×DF×$\frac{1}{2}$＝5×2×$\frac{1}{2}$＝5 である. △DBC＝△ABC－△ABD－△ACD＝12－$\frac{5}{2}$－5＝$\frac{9}{2}$である.

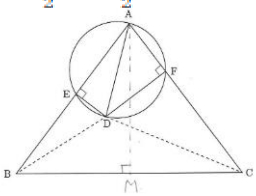

図 1:問題 1 解説の図([2] p.6)

問題 2(2008 年　第 5 問). 一辺の長さが 1 の正方形 ABCD がある. AD を直径とする円を O とし, 辺 AB 上の点 E を, 直線 CE が O の接線となるようにとる. このとき, 三角形 CBE の面積を求めよ(図 2 参照).

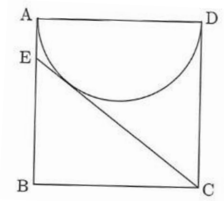

図 2:問題 2 の図([2] p.64)

解説. △CBE の面積を求めるために, BE を求める. 円 O と CE の接点を H とおく. △OHC と△ODC において, 円 O の半径より OH＝OD, 共通な線分より OC＝OC, 円の接線の性質より∠OHC＝90°＝∠ODC であるから, 斜辺と他の 1 辺がそれぞれ等しいので直角三角形の合同条件より, △OHC≡△ODC である. また, △OHE と△

OAE において, 円 O の半径より OH＝OA, 共通な線分より OE＝OE, 円の接線の性質より∠OHE＝90°＝∠OAE だから, 斜辺と他の 1 辺がそれぞれ等しいので直角三角形の合同条件より, △OHE≡△OAE である.

合同な図形の性質より, ∠COH＝∠COD, ∠HOE＝∠AOE だとわかる. ∠AOE＋∠HOE＋∠COH＋∠COD＝180° なので, 2∠HOE＋2∠COH＝180° . よって, ∠HOE＋∠COH＝∠COE＝90° である.

ここで, 三角形の内角・外角の性質より, ∠HCO＝∠180°－∠OHC－∠COH＝90°－∠COH＝∠COE－∠COH＝∠HOE である. また, ∠OHC＝90°＝∠COE だから, 2 組の角がそれぞれ等しいので三角形の相似条件より, △OHC∽△EHO である. 相似な図形の性質より, EH:OH＝OH:CH である. △OHC≡△ODC と合同な図形の性質より, OH＝OD＝$\frac{1}{2}$, CH＝CD＝1 だから EH:$\frac{1}{2}$＝$\frac{1}{2}$:1 であり, EH＝$\frac{1}{4}$である. △OHE≡△OAE と合同な図形の性質より, AE＝EH＝$\frac{1}{4}$なので BE＝1－$\frac{1}{4}$＝$\frac{3}{4}$ である. ゆえに, 三角形の面積の公式より△CBE＝BC×BE×$\frac{1}{2}$＝1×$\frac{3}{4}$×$\frac{1}{2}$＝$\frac{3}{8}$ である.

3 数学教育との関係

この節では, 2 節で整理した, 定理や性質の組み合わせ方から, 問題解決のための技法の抽出と, 誘導問題の作成を行う.

3.1 性質の組み合わせによる考察

この節では, 2.2 節で扱った各問題において各性質をどのように組み合わせているかを整理し, そのことからわかる問題解決のための技法を挙げる. 問題 1 からわかる技法を例 1.1 と例 1.2 に, 問題 2 からわかる技法を例 2.1 と例 2.2 に示す.

例 1.1(図 3 参照). 二等辺三角形△ABC の面積は,「二等辺三角形性質」,「三平方の定理」,「三角形の面積の公式」を用いて求められる.

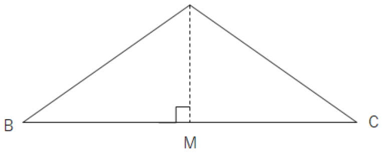

図 3:問題 1 例 1.1 の図

例 1.2(図 4 参照). AC を直径とする円が線分 AB と点 D(≠A)で交わるとき, △ABC の面積は,「直径と円周角の定理」,「三角形の面積の公式」を用いて求められる.

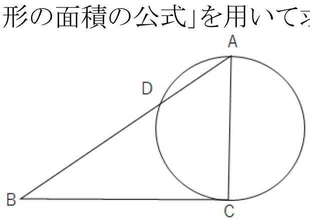

図 4:問題 1 例 1.2 の図

例 2.1(図 5 参照). 中心を O とする円 C の外部の点 A から, C へ 2 つの接線を引き, その 2 つの接点を B と D とするとき, △OAB≡△OAD は,「円の接線の性質」,「直角三角形の合同条件」を用いて示される.

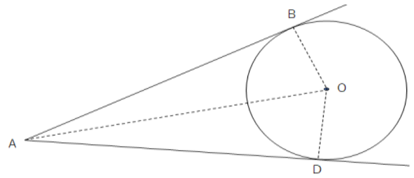

図 5:問題 2 例 2.1 の図

例 2.2(図 6 参照). ∠C=90° の直角三角形 ABC において, C から AB に下した垂線の足を H とするとき, △CHB∽△AHC は,「合同な図形の性質」,「三角形の相似条件」を用いて示される.

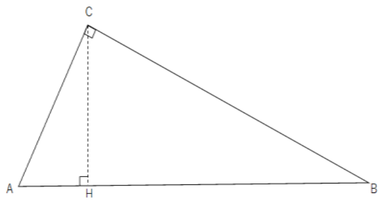

図 6:問題 2 例 2.2 の図

3.2 誘導問題の作成

この節では, 2 節の 2 題をもとに 3.1 節の技法を反映して作成した誘導問題を示す.

問題Ⅰ. 問題 1 の条件のもとで, 以下の各問に答えよ.
(1)△ABC の面積を求めよ.
(2)△ABD および△ACD の面積を求めよ.
(3)△DBC の面積を求めよ.
(2003 年 第 6 問 2.2 節問題 1 改)

問題Ⅱ. 問題 2 の条件が成立するとする. 円 O の中心から, CE に下した垂線の足を H としたとき, 以下の各問に答えよ.
(1)△OHC≡△ODC となることを証明せよ.
(2)△OHE≡△OAE となることを証明せよ.
(3)△ECO∽△EOH となることを証明せよ.
(4)EH の長さを求めよ.
(5)△CBE の面積を求めよ.
(2008 年 第 5 問 2.2 節問題 2 改)

4 おわりに

数学への興味・関心を引くような魅力ある授業を展開していき, 生徒の興味・関心の幅を広げられるようなアプローチを教員としてこれから実践していきたい.

参考文献

[1] 数学オリンピック財団,『ジュニア数学オリンピック過去問題集』, 日本評論社, 東京, 2018