

# PenduBot の製作と安定化制御

2017SC012 磯村真也 2017SC054 野澤武

指導教員：中島明

## 1 はじめに

劣駆動系とは、アクチュエータの数がシステムの自由度よりも小さい系の総称である。少数のアクチュエータでシステムを構成できるため、軽量化、低コスト化、省エネルギー化の観点で非常に優れており、宇宙や深海などにおける極限での活動を想定したロボット等、様々な産業において活躍が期待されている [1]。しかしシステムが強い非線形性を有し、少数のアクチュエータでシステム全体の制御をする必要があるため、劣駆動系の制御は非常に困難である。本研究では劣駆動系システムである、Pendubot の設計とその安定化制御をテーマにした研究を行う。Pendubot とは、垂直平面内を回転するアームの先端に、垂直平面内を回転する振子を取り付けられた Pendulum(振子) と Robot(アーム) を組み合わせたシステムである。本研究では線形最適制御則による Pendubot の安定化制御を達成することを目標としている。

## 2 実験機

### 2.1 概要

Pendubot の実験機設計は本研究の大きな柱の一つである。Pendubot の基本構造は Block 氏の Pendubot[2] を参考にした。製作する実験機が様々な実験に応用可能であり、部品の組み換え・調整・修理が容易にできることを念頭に設計を進めた。設計は 3DCAD ソフトの Inventor を使い、部品の加工は株式会社テクニカルサポートに依頼した。

### 2.2 実験機設計

実験機の設計を図 1 に示す。歯車を介してモータに繋がれたリンク 1 部分、リンク 1 の先に繋がれたリンク 2 部分、台座部分の材料は、アルミを使用している。リンク 1 が接続されている軸は、鉄を使用している。エンコーダは二つ使用する。一つ目はモータに付属しており、二つ目はリンク 1 とリンク 2 の接続部に固定している。モータとリンク 1 が接続されている軸の間は歯車を通してトルクが伝わるようにしている。これには、モータの軸に負荷がかかることによる性能低下を防ぐ狙いがある。リンク 1 とリンク 2 に関しては、様々な実験で使用できるように取り外しが可能な設計とした。リンク 2 は 20cm, 25cm, 30cm の 3 本の製作を依頼した。

### 2.3 システム構成

システム構成図を図 2 に示す。リンク 1 の回転角度は歯車を介して DC モータに内蔵されているエンコーダで観測し、リンク 2 の回転角度はマイクロエンコーダで観測

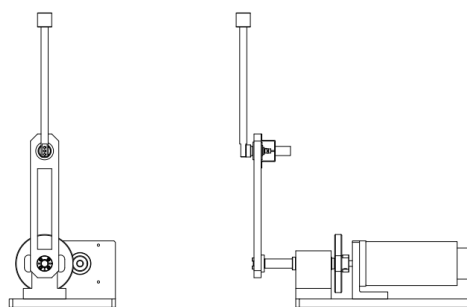


図 1 実験機の設計

する。エンコーダからの観測データや PC からの制御入力は、Compact RIO を用いて PC と送受信を行う。また、制御プログラムに関しては Labview を用いて設計した。

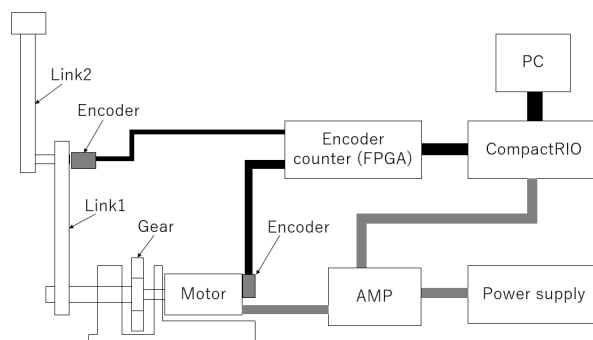


図 2 システムの構成図

### 2.4 モータの選定

線形最適制御で Pendubot のシミュレーションを行い、結果より得られた値を用いて適切なモータを選定した。粘性摩擦係数  $b_1$ ,  $b_2$  は古川氏, 星野氏, 野々氏の倒立振子の値 [3] を参考にし、その他のパラメータは CAD 上の値を用いた。コスト削減のため、回路の部分に関しては研究室の設備を用いることにした。そのためモータには最大電圧  $\pm 40[V]$ , 最大電流  $10[A]$  の制約がかかる。また、機械設計では安全率を考慮する必要がある。本研究では安全率 1.5 で選定を行った。よってモータの選定時には、設計上の限界値として最大電圧を  $\pm 26.6[V]$ , 最大電流を  $6.6[A]$  とした。モータの最大回転数と最大トルクは、カタログ値に対して安全率を考慮し、設計上の限界値とした。

#### 2.4.1 選定したモータの性能検証

表 1 はシミュレーションにて得た値と設計上の限界値との比較である。シミュレーションでの値が設計上の限界値を超えていないため、選定したモータは適切といえる。

表 1 シミュレーション値と設計上の限界値の比較

	シミュレーション値	設計上の限界値
最大電圧	+7.47[V]	±26.6[V]
最大電流	2.17[A]	6.6[A]
最大回転数	980[rpm]	2000[rpm]
最大トルク	0.33[N・m]	1.33[N・m]

### 3 PenduBot システムのモデル化

#### 3.1 運動方程式の導出

[4] を参考にし, PenduBot システムを図 3 で示すモデルとして, Lagrange の運動方程式を導出する. 表 2 で各物理パラメータの定義をする.

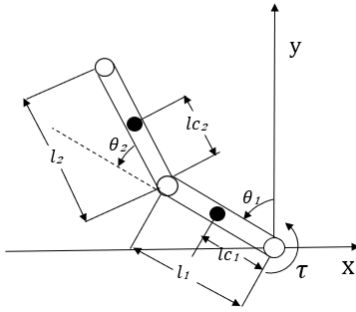


図 3 PenduBot のモデル

表 2 PenduBot の物理パラメータ

記号	名称
$l_1$	リンク 1 の長さ
$l_2$	リンク 2 の長さ
$l_{c1}$	リンク 1 の回転中心から重心までの長さ
$l_{c2}$	リンク 2 の回転中心から重心までの長さ
$m_1$	リンク 1 の質量
$m_2$	リンク 2 の質量
$g$	重力加速度
$J_1$	リンク 1 の慣性モーメント
$J_2$	リンク 2 の慣性モーメント
$b_1$	リンク 1 の粘性摩擦係数
$b_2$	リンク 2 の粘性摩擦係数
$R_a$	電気子抵抗
$K_t$	トルク定数
$K_e$	逆起電力定数
$n$	モータとリンク 1 のギア比

リンク 1, リンク 2 の重心の座標  $P_1, P_2$  は以下のように表すことができる.

$$P_1 = \begin{bmatrix} P_{x1} \\ P_{y1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_{c1} \sin \theta_1 \\ l_{c1} \cos \theta_1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} P_{x2} \\ P_{y2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 \sin \theta_1 - l_{c2} \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \cos \theta_1 + l_{c2} \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} \quad (2)$$

これらを時間について微分すると,

$$\dot{P}_1 = \begin{bmatrix} -l_{c1} \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \\ -l_{c1} \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\dot{P}_2 = \begin{bmatrix} -l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 - l_{c2}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ -l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 - l_{c2}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} \quad (4)$$

となる. システム全体の運動エネルギー  $T$ , ポテンシャルエネルギー  $U$  は,

$$T = \frac{1}{2}(J_1 \dot{\theta}_1^2 + m_1 \dot{P}_1^T \dot{P}_1) + \frac{1}{2}(J_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + m_2 \dot{P}_2^T \dot{P}_2) \quad (5)$$

$$U = m_1 g P_{y1} + m_2 g P_{y2} \quad (6)$$

となる. これらを用いて Lagrangian は次式で求まる.

$$L = T - U \quad (7)$$

このとき, リンク 1 とリンク 2 それぞれの粘性摩擦を考慮した Lagrange の運動方程式は,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} + b_1 \dot{\theta}_1 = \tau \quad (8)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} + b_2 \dot{\theta}_2 = 0 \quad (9)$$

となる. 実験機に搭載する DC サーボモータの伝達特性は, 電圧入力を  $u$  とすると

$$u = R_a i + n K_e \omega \quad (10)$$

$$\tau = n K_t i \quad (11)$$

で表される. これを整理すると,

$$\tau = -\frac{n^2 K_e K_t}{R_a} \dot{\theta}_1 + \frac{n K_t}{R_a} u \quad (12)$$

となる. 以降は  $t_a = \frac{n^2 K_e K_t}{R_a}$ ,  $t_b = \frac{n K_t}{R_a}$  と置き,  $\tau = -t_a \dot{\theta}_1 + t_b u$  で表している. 以上のことから運動方程式は以下の形式で表すことができる.

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} \quad (13)$$

ただし,

$$f_{11} = r_1 + r_2 + 2r_3 \cos \theta_2$$

$$f_{12} = f_{21} = r_2 + r_3 \cos \theta_2, f_{22} = r_2$$

$$M_1 = (r_3 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 - t_a - b_1) \dot{\theta}_1 + (r_3 \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 + r_3 \dot{\theta}_2 + r_3 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2) \dot{\theta}_2 + r_4 \sin \theta_1 + r_5 \sin(\theta_1 + \theta_2) + t_b u$$

$$M_2 = r_3 \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_2 - b_2 \dot{\theta}_2 + r_5 \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

$$r_1 = m_1 l_{c1}^2 + J_1 + m_2 l_1^2, r_2 = m_2 l_{c2}^2 + J_2,$$

$$r_3 = m_2 l_1 l_{c2}, r_4 = m_1 g l_{c1} + m_2 g l_1, r_5 = m_2 g l_{c2}$$

と置いた.

### 3.2 状態方程式の導出

システムの状態変数  $\boldsymbol{x}$  を  $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T = [\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2]^T$  とすると、システムは以下のように表せる。

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} x_3 & x_4 & \frac{f_{22}M_1 - f_{12}M_2}{f_{11}f_{22} - f_{12}^2} & \frac{f_{12}M_2 - f_{12}M_1}{f_{11}f_{22} - f_{12}^2} \end{bmatrix}^T \quad (14)$$

さらに線形化の手法としてテイラー展開の一次近似を上式に用いると、

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}u \quad (15)$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{N}_1 & \boldsymbol{N}_2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ D_1^{-1}r_2t_b \\ -D_1^{-1}(r_2 + r_3)t_b \end{bmatrix}$$

となる。ここでは、

$$D_1 = r_1r_2 - r_3^2, \boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{N}_1 = D_1^{-1} \begin{bmatrix} r_2r_4 - r_3r_5 & -r_3r_5 \\ (r_1 + r_3)r_5 - (r_2 + r_3)r_4 & (r_1 + r_3)r_5 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{N}_2 = D_1^{-1} \begin{bmatrix} -r_2(t_a + b_1) & (r_2 + r_3)b_2 \\ (r_2 + r_3)(t_a + b_1) & -(r_1 + r_2 + 2r_3)b_2 \end{bmatrix}$$

とした。

## 4 パラメータ同定

### 4.1 実験方法

慣性モーメントは理論的に求めることも可能だが、リンク 1 やリンク 2 の形状は一樣な棒ではないため、リンク 1 およびリンク 2 の慣性モーメントの理論値と実際の値には誤差が生じる。また、粘性摩擦係数は実験的にのみ得ることが出来る。そのため、未知パラメータをリンク 1 の慣性モーメントと粘性摩擦係数、リンク 2 の慣性モーメントと粘性摩擦係数とした。計算方法は最小二乗法を用いて同定する。

実験方法は以下の 2 通りである。

1. リンク 2 を取り外し、リンク 1 に正弦波入力を印加して角度を測定する。測定データを用いて、リンク 1 の慣性モーメントと粘性摩擦係数の同定を行う。
2. リンク 2 を振り上げた状態から自由応答させて、角度を測定する。測定データを用いて、リンク 2 の慣性モーメントと粘性摩擦係数の同定を行う。

#### 4.1.1 同定結果

同定値の精度を上げるために、正弦波入力の振幅と周波数を変更し実験を複数回行い、パラメータ同定を行った。最終的に同定された値と、同定されたパラメータを用いたシミュレーションの応答と、実験により得られた応答を比較する、検証用の図を示す。

表 3 パラメータ同定結果

	慣性モーメント $J_1$ [kg · m <sup>2</sup> ]	粘性摩擦係数 $b_1$ [N · s/rad]
リンク 1	$1.98 \times 10^{-3}$	$5.01 \times 10^{-2}$
リンク 2	$2.86 \times 10^{-3}$	$7.22 \times 10^{-4}$

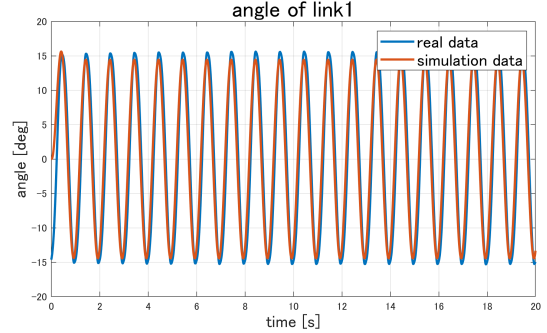


図 4 リンク 1 の検証

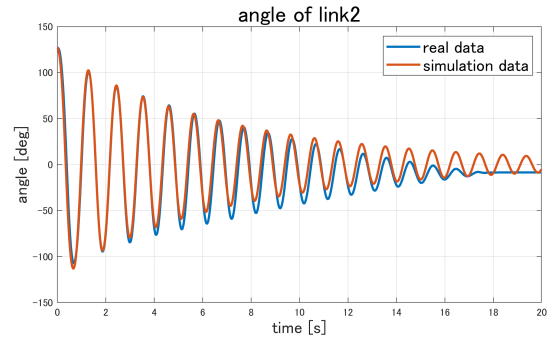


図 5 リンク 2 の検証

## 5 PenduBot の安定化制御

### 5.1 実験機の物理パラメータ

実験機の物理パラメータを表 4 に示す。

表 4 実験機の物理パラメータ

記号	値	記号	値
$m_1$	0.190[kg]	$J_1$	$1.98 \times 10^{-3}$ [kg · m <sup>2</sup> ]
$l_1$	0.2[m]	$J_2$	$2.86 \times 10^{-3}$ [kg · m <sup>2</sup> ]
$l_{c1}$	0.117[m]	$b_1$	$5.01 \times 10^{-2}$ [N · m/rad]
$m_2$	0.072[kg]	$b_2$	$7.22 \times 10^{-4}$ [N · m/rad]
$l_2$	0.303[m]	$g$	9.8[m/s <sup>2</sup> ]
$l_{c2}$	0.172[m]	$R_a$	3.43[Ω]
$K_t$	0.152[V · s/rad]	$K_e$	0.153[V · s/rad]
$n$	1:4		

### 5.2 線形最適レギュレータの設計

本研究では、PenduBot の安定化制御を線形最適制御問題と考へ、線形最適状態フィードバックによって安定化する

る. 評価関数

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + u^T R u) dt, Q \geq 0, R > 0 \quad (16)$$

を最小化する線形最適入力  $u$  は Riccati 方程式の解  $P$  を用いて,

$$u = -K \mathbf{x} = -R^{-1} B^T P \mathbf{x} \quad (17)$$

である. 評価関数の重み行列  $Q, R$  は以下のように選ぶ.

$$Q = \text{diag}(10, 10, 1, 1), R = 1 \quad (18)$$

この時のフィードバックゲイン  $K$  は次のようになった.

$$K = [72.27 \quad 69.45 \quad 19.19 \quad 13.83] \quad (19)$$

### 5.3 非線形モデルでのシミュレーション結果

図 6, 7 は本節にて求めた制御器による非線形モデルに対するシミュレーション結果である. 初期値は  $\mathbf{x}(0) = [0, 5, 0, 0]^T$  [deg] とした.

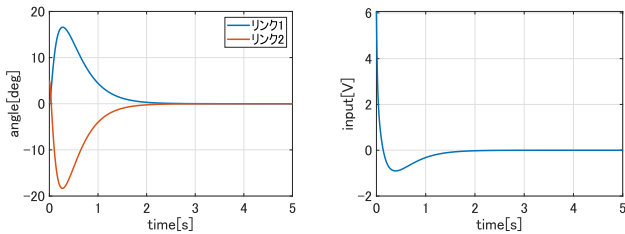


図 6 リンク 1 とリンク 2 のシミュレーション結果

図 6 に注目する. リンク 1 とリンク 2 が時間が経つにつれ, 0 に収束していることがわかる. よって, 安定化に成功している.

## 6 安定化実験

Pendubot の安定化実験を行った. 状態フィードバックには角速度が必要であるが, 実機実験では角速度を得ることができない. そのため, 得られた角度に対してローパスフィルタを通した後, 疑似微分を行うことで角速度を取得した. サンプルタイムは 1[ms] である. 実験結果を図 8, 9 に示す. リンク 1, リンク 2 ともに振動しているものの, 安定した倒立状態を維持できている. この振動は, 不感帯を考慮できていなかったため生じたと考えられる [5].

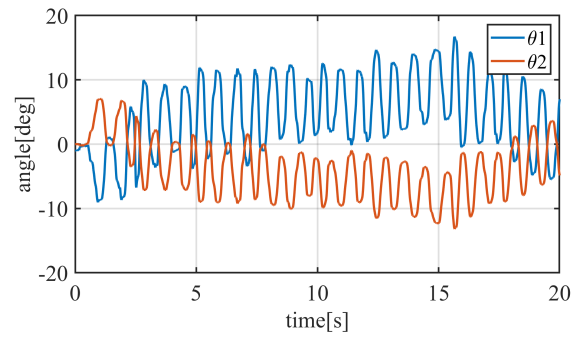


図 8 リンク 1 とリンク 2 の実験結果

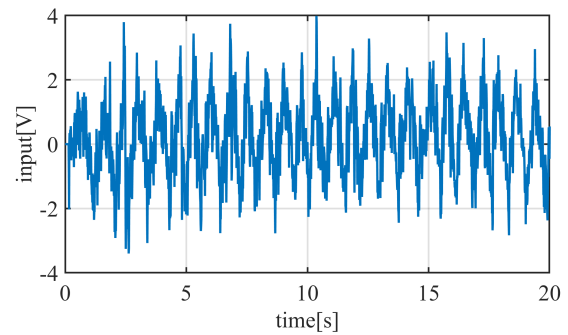


図 9 入力電圧の実験結果

## 7 おわりに

本稿では Pendubot の設計, 製作, Pendubot システムのモデリング, パラメータ同定, 線形最適制御の設計, Pendubot の安定化実験について説明した. 実験では, Pendubot の倒立状態の維持を達成することができた. しかし, 不感帯を考慮しなかったため, 振動が生じていた可能性がある. 今後は, 不感帯を考慮に入れた制御器の設計, チューニングを行い, より安定した制御の実現を目指していく. その後, 振り上げ安定化の制御器開発を進めたいと考えている.

## 参考文献

- [1] 田中征治: 『回転型振子の振り上げ・安定化制御に関する研究』. 岡山県立大学, 2014.
- [2] Daniel J. Block: MECHANICAL DESIGN AND CONTROL OF THE PENDUBOT, Department of General Engineering in University of Illinois, 1991.
- [3] 古川大輝, 星野紘輝, 野々雄斗: 『回転型二重倒立振子の製作と安定化制御』. 南山大学, 2019.
- [4] 林雅大, 日比野正嗣, 加藤任真: 『エネルギー制御による Pendubot の振り上げと安定化 - 同定実験による現実的なシミュレーションモデルの構成 -』. 南山大学, 2013.
- [5] 杉江俊治, 岡田昌史: 『並列倒立振子システムの  $H_{\infty}$  制御』. システム制御情報学会論文誌 Vol.6, 1993.