線分都市モデルを用いた流動のすれ違いの解析

2017SS058 佐渡志緒里

指導教員：三浦英俊

1　はじめに

現在コロナウイルスの感染拡大が世界中で大きな問題になっている．感染拡大を抑制するため，日本では人との接触を減らすことを国民に求めたが，具体的な方法は十分な検討がなされていない．本研究では，人同士のすれ違い量を最小化する都市施設の最適配置について考える．単純な線分都市モデルを用いて都市施設の配置とすれ違う量の関係を考察した．

2　線分都市を用いたすれ違いモデル

長さ a の線分都市を考える．人の移動速度は一定であるものとする．都市住民は最も近い都市施設に行き，用事を済ませたら帰宅するものと仮定する．移動発生密度を単位長さ・単位時間当たり b[人] とする．

単位時間当たりに地点 $z(z \in [0, a])$ を右向きに通過する人数を $g_+(z)$，地点 z を左向きに通過する人数を $g_-(z)$ とする．地点 z におけるすれ違い量 $G(z)$ を両者の積 $G(z) = g_+(z)g_-(z)$ と定義する (図 1).

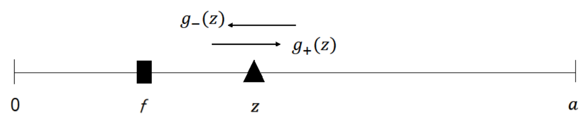

図 1　線分都市モデル

都市全体のすれ違い人数の合計 H は,

$$H = \int_0^a G(z)dz$$

となる.

3　すれ違いを最小にする都市施設配置

3.1　都市施設が 1 つの場合

線分上に 1 つだけ都市施設がある場合を考えてその位置を f とし，すれ違いの合計 H が最小となる都市施設の位置を求める.

すれ違い量を計測する地点 z が f よりも左にある場合，位置 $z(0 \leq z \leq f)$ を都市施設方向 (右、+) に向かって通過する人数は $g_+(z) = bz$[人]，都市端点方向 (左、−) に向かって通過する人数も同じく $g_-(z) = bz$[人] と表せる．よって $G(z) = (bz)^2$ である.

すれ違い量を計測する地点 z が f よりも右にある場合 $(f \leq z \leq a)$，$g_+(z) = b(a-z)$[人]，$g_-(z) = b(a-z)$[人] と表せる．よって $G(z) = (b(a-z))^2$ である.

したがって都市全体のすれ違い人数の合計 H は

$$H = \int_0^f (bz)^2 dz + \int_f^a (b(a-z))^2 dz$$

である．H を f で偏微分し，0 となったとき H は最小となるため，H は $f = a/2$ のとき最小となる.

3.2　都市施設数が n の場合

都市施設数が 1 から 5 までの H を求め，都市施設数が n となる場合のすれ違う人数の総数を求めると以下のようになる.

$$\begin{aligned}H_n = &\frac{a^3 b}{3} - a^2 b f_n + ab f_n^2 + \frac{1}{4} b(f_1^3 + f_1^2 f_2 \\ &- f_1 f_2^2 + f_2^2 f_3 - f_2 f_3^2 - f_4(-f_3^2 + f_3 f_4) \cdots \\ &- f_{n-1}(-f_{n-2}^2 + f_{n-2} f_{n-1}) \\ &- f_n(-f_{n-1}^2 + f_{n-1} f_n + f_n^2))\end{aligned}$$

これらのことから，都市施設数が n となる場合のすれ違う人数の総数が最小となる f_1，f_2，$\cdots$，f_n の組み合わせの法則を導き出すと以下のように表すことができた.

$$f_i = \frac{2i-1}{2n}(i = 1, ..., n)$$

4　施設までの距離の順番に対応して来訪頻度が変化する場合

最も近い施設でなくても利用する可能性があるとした場合，すれ違い量が最小となる施設配置はどうなるかについて取り組む.

長さ a の線分都市を考える．人の移動速度は一定であるものとする．都市住民はどの施設にでも行くことができるものとし，用事を済ませたら帰宅するものと仮定する．移動発生密度を単位長さ・単位時間当たり b[人] とする.

4.1　都市施設数が 2 の場合

都市施設数が 2 の場合，位置を f_1 と f_2 として考える $(f_1 < f_2)$．ただし，移動の出発地から近い都市施設を確率 c で来訪し, 遠い都市施設を確率 $(1-c)$ で来訪するものとする (c は 0.5 より大きい値とする)．区間 $1(0 \leq z \leq f_1)$，区間 $2(f_1 \leq z \leq (f_1+f_2)/2)$, 区間 $3((f_1+f_2)/2 \leq z \leq f_2)$, 区間 $4(f_2 \leq z \leq a)$ のそれぞれについて同様に考えると，都市全体のすれ違い人数の合計 H は

$$H=\int_0^{f_1}(bz)^2dz+\int_{f_1}^{\frac{f_1+f_2}{2}}(b(1-c)z+bc(\frac{f_1+f_2}{2}-z)$$
$$+b(1-c)(a-\frac{f_1+f_2}{2}))^2dz$$
$$+\int_{\frac{f_1+f_2}{2}}^{f_2}(b(1-c)(\frac{f_1+f_2}{2})+bc(z-\frac{f_1+f_2}{2})$$
$$+b(1-c)(a-z))^2dz+\int_{f_2}^{a}(b(a-z))^2dz$$

c がそれぞれ分母にあることから，$f_1=a/(4c)$，$f_2=a(-1+4c)/(4c)$ と求められる．

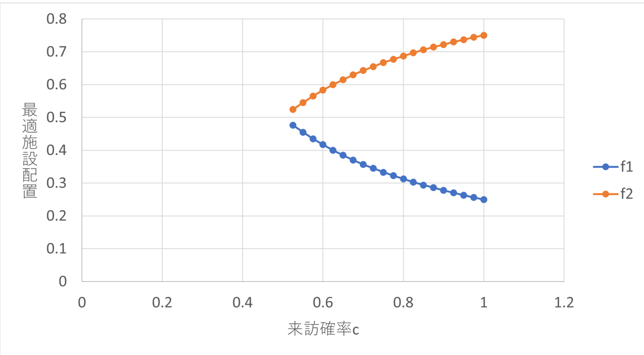

図 2　来訪確率 c の場合の最適都市施設配置

4.2　都市施設数が 3 以上の場合

まず移動モデルについて考える．長さ 1 の線分都市を考え，人の移動速度は一定であるものとし，人口は，都市内に一定の密度で分布しているものとする．

都市施設数が n の場合について考える．線分都市上に n 個の施設があるとする．地点 $j(j=1,...,n)$ から i 番目に近い施設の来訪頻度を p_{ij} とする．来訪頻度は,

$$\frac{n+1-i}{\sum_{i=1}^{n} i}(i=1,...,n)$$

と与えることとする．これは住民から近い施設ほど来訪確率が高くなるようにモデルを設定したものである．このとき，都市全体のすれ違い量が最小となる n 個の施設の位置を求めたい.

しかしこの問題は解析的に解くことが困難であるので，線分上に等間隔に $k=100$ 個の代表点を置き，これら代表点に離散的に住民がいるものとして数値計算によって最適配置を求めた.

右向き来訪通過頻度を m_{ij} とすると，地点 j が都市施設 f_i より左にあるとき,

$$m_{ij}=\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{i=1}^{n}p_{ij}$$

と表すことができ，地点 j が都市施設 f_i より右にあるとき,

$$m_{ij}=0$$

と表すことができる.

同様に考えて，左向き来訪通過頻度を n_{ij} とすると，地点 j が都市施設 f_i より右にあるとき,

$$n_{ij}=\sum_{k}^{j=100}\sum_{i=1}^{n}p_{ij}$$

と表すことができ，地点 j が都市施設 f_i より左にあるとき,

$$n_{ij}=0$$

と表すことができる.

右向き通過交通量と左向き通過交通量は等しいため 2 乗で表すことができるので，すれ違い量の合計は以下のように立式することができる.

$$Q=\min\sum_{j=1}^{k}(\sum_{i=1}^{n}m_{ij}n_{ij})^2$$

すれ違い量を最小化する都市施設の最適施設配置を求めると，都市施設数が 6 の場合, 以下のように求めることができた.

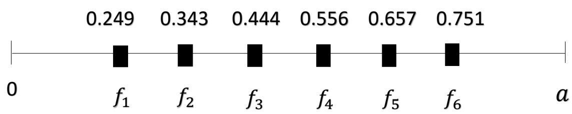

図 3　都市施設が 6 つの場合　すれ違い量の合計 54755.6

都市施設数が 2 から 6 までの結果より，都市施設数が奇数の場合，真ん中の都市施設は線分の中心 0.5 付近に位置し，他の都市施設は真ん中の都市施設から対称的な配置に位置するとき，すれ違い量を最小化する都市施設の最適配置になるとわかった.

また都市施設が偶数の場合，線分の中心 0.5 から対称的な配置に位置するとき，すれ違い量を最小化する都市施設の最適配置になるとわかった.

5　おわりに

4 章では距離が近い順に来訪頻度が高くなる場合の線分モデルを作成し，すれ違い量を最小とする都市施設の最適配置について考えたが，現実の状況に当てはめると，必要な商品の違いや販売する商品の違いによって来訪したいと考える施設が変化する状況が考えられる．今後の課題としては，それぞれの目的によって来訪頻度を変えることができるモデルを考え，すれ違い量を最小化する最適施設配置を求めるべきではないかと考える.

参考文献

[1] 三浦英俊，鈴木勉，“格子状交通ネットワークモデルにおける移動経路と流動交差量の分布について”，都市計画論文集，52，pp．717-722，2017.