

日経平均株価と輸出企業の収益率を用いた時系列解析

2017SS053 西村侑真

指導教員：阿部俊弘

1 はじめに

私は高校生の時から株価というものに興味があった。前々から株価の変動を見てトレードすることに憧れを感じていたため、株価について研究して、自分で株価の動向を見られるようになりたいと思い研究を始めた。データは2016年の日経平均株価終値、トヨタ、任天堂、ソニーのデータを使用する。(Web[1] 参照) 分析方法として時系列解析を行う。(横内・青木 [2] 参照)

2 自己回帰モデルの導入

確率変数列 $\{R_1, R_2, R_3, \dots, R_n\}$ の要素である R_t と R_{t-1} の間に何らかの関係性があり、その関係性について確率変数を用いて定式化すると

$$R_t = \mu + \phi_1 R_{t-1} + \varepsilon_t \quad (1)$$

と表すことができる。(1) 式を自己回帰モデルと呼び、AR(1) と表記する。また ε_t にはホワイトノイズを仮定する。AR(1) モデルが定常性を満たすためには $|\phi_1| < 1$ が必要である。AR(1) モデルを p 時点まで遡った表現は

$$R_t = \left(\sum_{k=0}^{p-1} \phi_1^k \right) \mu + \phi_1^p R_{t-p} + \left(\sum_{k=0}^{p-1} \phi_1^k \cdot \varepsilon_{t-k} \right)$$

と表現される。

3 ARCH モデルと GARCH モデル

ARCH(p) モデルとは時系列 r_t を次のように表現する統計モデルのことである。

$$r_t = \mu + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t = \sigma_t \nu_t$$

$$\nu_t \sim N(0, 1)$$

$$E(\varepsilon_t^2) = \sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2$$

ここでは、時間変動する誤差項 ε_t の分散 $E(\varepsilon_t^2) = \sigma_t^2$ をボラティリティと呼び、時系列のばらつきやすさを示す指標として用いる。次に、GARCH(p, q) モデルは、

$$r_t = \mu + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t = \sigma_t \nu_t$$

$$\nu_t \sim N(0, 1)$$

$$E(\varepsilon_t^2) = \sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

と定義される。最後の式を見ると、GARCH(p, q) モデルのボラティリティの更新の式には、 $\sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2$ という過去の

ボラティリティの線形和が加わっている。つまり、 t 時点のボラティリティは過去の誤差の2乗と過去のボラティリティによって決定されている構造となっている。

4 AR(1)+ARCH モデルの当てはめ

AR(1)+ARCH(1) モデルを2016年の日経平均株価終値とトヨタの収益率に当てはめる。ここで、各時点の ε_t はホワイトノイズに従っている。ARCH や GARCH モデルの当てはめにおいて、長さを判断するために大事な点が2点ある。

ARCH, GARCH モデルが当てはまっているかの判断基準

- 推定した係数の信用度が高い。つまり、係数についても仮説検定の p 値が小さい。経済データの場合によく用いられる有意水準 10% で考えるときは、 p 値は 0.1 以下であること。
- 推定した標準化残差 ν が仮定した分布（普通は標準正規分布）に従っていること。

この2点を満たしていればモデルの当てはめとして概ね成功しているといえる。mu, ar1, omega, alpha1 は、それぞれ $\mu, \phi_1, \omega, \alpha_1$ を表している。出力結果からわかるように、AR(1)+ARCH(1) モデルを当てはめた結果は日経平均株価終値

$$r_t = -0.02454 - 0.13143r_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t = \sigma_t \nu_t$$

$$\nu_t \sim N(0, 1)$$

$$E(\varepsilon_t^2) = \sigma_t^2 = 2.11281 + 0.26009\varepsilon_{t-1}^2$$

トヨタ

$$r_t = -0.07663 - 0.11617r_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t = \sigma_t \nu_t$$

$$\nu_t \sim N(0, 1)$$

$$E(\varepsilon_t^2) = \sigma_t^2 = 3.55129 + 0.27546\varepsilon_{t-1}^2$$

となる。このときの対数尤度の値は日経平均株価終値が -464.04、トヨタが -530.80 であった。次に、標準化残差 ν_t に対して正規 Q-Q プロットを描いてみる。図1を見ると、最初から値が直線から離れているため、正規分布より歪んでいるとわかる。この図をみて正規性がないといえるが、これを有意にするために、Shapiro-Wilk の正規性検定を行う。分析をしてみると、日経平均株価終値とトヨタの p 値は 0.01 未満なため、 ν_t の推定値が正規分布している帰無仮説は有意水準 10% で棄却されるため、Q-Q プロットどおり正規性がないとわかる。

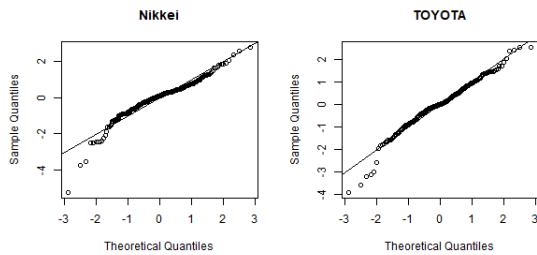


図1 AR(1)+ARCH の標準化残差 ν_t の Q-Q プロット

5 AR(1)+GARCH(1,1) モデルの当てはめ

次に AR(1)+GARCH(1,1) モデルを当てはめてみると、mu, ar1, omega, alpha1, beta1 は、それぞれ μ , ϕ_1 , ω , α_1 , β_1 を表している。出力結果からわかるように、AR(1)+GARCH(1) モデルを当てはめた結果は日経平均株価

$$r_t = 0.063 - 0.111r_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t = \sigma_t \nu_t$$

$$\nu_t \sim N(0, 1)$$

$$E(\varepsilon_t^2) = \sigma_t^2 = 0.158 + 0.215\varepsilon_{t-i}^2 + 0.758\sigma_{t-i}^2$$

トヨタ

$$r_t = 0.015 - 0.080r_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t = \sigma_t \nu_t$$

$$\nu_t \sim N(0, 1)$$

$$E(\varepsilon_t^2) = \sigma_t^2 = 0.444 + 0.250\varepsilon_{t-i}^2 + 0.680\sigma_{t-i}^2$$

このときの対数尤度の値は日経平均株価終値が -455.94 、トヨタが -521.88 であった。次に、標準化残差 ν_t の推定値を調べるために Q-Q プロットを描いてみる。

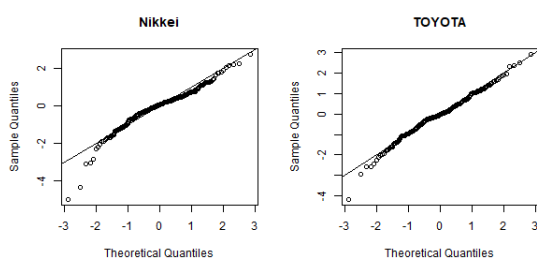


図2 AR(1)+GARCH(1,1) の標準化残差の Q-Q プロット

図2を見ると、端に近くにつれて値が直線から外れているため、正規性がないといえる。先ほど同様に、こちらのモデルでも Shapiro-Wilk 検定をしてみると、このモデルも p 値は 0.01 未満となり、帰無仮説が棄却されるため、標準化残差の正規性はないといえる。どちらのモデルも「推定した標準化残差が標準正規分布に従う」という基準を満たさなかった。よって 2016 年の日経平均株価の終値とトヨタの収益率のモデル化は不十分であった。

6 skew normal 分布の当てはめ

skew normal 分布は次のような密度関数を持つ。(Azzalini[3] 参照)

$$f(x) = \frac{1}{\omega\pi} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{2\omega^2}\right] \int_{-\infty}^{\alpha\left(\frac{x-\xi}{\omega}\right)} \exp\left[-\frac{t^2}{2}\right] dt$$

ここで範囲は $-\infty < x < \infty$, ξ はロケーション, ω はスケール, α はシェイプ (歪み具合) を示すパラメータである。この skew normal 分布を使った ARCH(1) の当てはめを 2016 年の日経平均株価終値とトヨタの標準残差に当てはめると、

日経平均株価終値

$$r_t = -0.06380 + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t = \sigma_t \nu_t$$

$$\nu_t \sim SN(0, 1, 0.81275)$$

$$E(\varepsilon_t^2) = \sigma_t^2 = 193240 + 0.36643\varepsilon_{t-i}^2$$

トヨタ

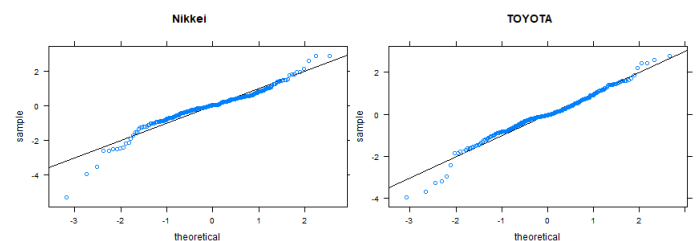
$$r_t = -0.08657 + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t = \sigma_t \nu_t$$

$$\nu_t \sim SN(0, 1, 0.87565)$$

$$E(\varepsilon_t^2) = \sigma_t^2 = 354620 + 0.28461\varepsilon_{t-i}^2$$

このときの対数尤度の値は日経平均株価終値が -460.67 、トヨタが -530.29 であった。次に、Q-Q プロットを描いてみると



図を見てわかるように、かなりの部分が直線から離れていることがわかる。

7 おわりに

いくつかの手法を用いて日経平均株価とトヨタの動向を見ることができた。この研究により、自分で動向を予測できるため、色々な株価の動向を見ていきたい。

参考文献

- [1] YAHOO!JAPAN ファイナンス:
<https://finance.yahoo.co.jp/>
- [2] 横内大介, 青木義充 (2014). 時系列データ分析, 技術評論社.
- [3] Azzalini, A. (1985). A class of distributions which includes the normal ones. Scandinavian journal of statistics, 171-178.