Value at Risk とコピュラを用いたリスク管理

2017SS012 蛭薙泰大

指導教員：阿部俊弘

1　はじめに

金融リスク管理におけるリスク計測の手法として, Value at Risk(以下, VaR) が広く使われており, 周辺分布として正規分布を仮定することが多い．しかし, 実際の市場価格の分布は正規分布よりも厚い裾を持つことや, 複数のリスクファクターを想定する場合, 多変量正規分布では各リスクファクター間の依存関係を表しきれない問題点がある．そこで今回 VaR 算出の際, モンテカルロ・シミュレーション法を用いて, 算出モデルにコピュラを用いたモデルについて検証を行い, 前述の問題点を改善し, より精度の高い VaR の算出を目的とした．銀行業界 5 銘柄のポートフォリオの日次収益率データから, 日次収益率の周辺分布を t 分布とする正規コピュラを用いたモデルで VaR の算出を行った．VaR の算出にコピュラを用いることの有用性を示した研究としては戸坂凡展, 吉羽要直らの研究 [1] がある．

2　VaR の概要

2.1　VaR の定義

VaR とは, 日本語では「予想最大損失額」と訳され, 市場リスクを統計的手法で測定したリスク管理指標である [2]．VaR は, 過去の一定期間 (観測期間) の変動データに基づき, 将来のある一定期間 (保有期間) のうちに, ある一定の確率 (信頼水準) の範囲内で被る可能性のある最大損失額を統計的手法により推定した値で定義される．

リスクのある資産ポートフォリオと固定された保有期間 Δ を考え, 対応する損失分布の分布関数を $F_L(l) = P(L \leq l)$ で表すとする．

ある $\alpha \in (0,1)$ が与えられたとき, 当該ポートフォリオに対する信頼水準 α の VaR は, 損失 L が l を超える確率が $1-\alpha$ 以下となる下限 l の値と定義され, 次式で表せる．

$$\begin{aligned}\mathrm{VaR}_\alpha &= \inf\{l \in \mathbb{R} : P(L > l) \leq 1-\alpha\} \\ &= \inf\{l \in \mathbb{R} : F_L(l) \geq \alpha\}.\end{aligned}$$

3　コピュラの概要

3.1　コピュラの定義

n 種類のリスク・ファクターを想定し, それらを確率変数 $X_1,\dots,X_n$ で表す．複数のリスク・ファクターの確率的変動を同時に捉えることは, 確率変数 $X_1,\dots,X_n$ の同時分布関数 $F(x_1,\dots,x_n)$ の挙動を表すことに等しい．周辺分布関数 $F_1,\dots,F_n$ と, 同時分布関数 $F(x_1,\dots,x_n)$ の間には, 次の関係がある．

スクラー (Sklar) の定理:

周辺分布関数 $F_1,\dots,F_n$ を持つ連続な n 変量同時分布関数を F とする,

$$\begin{aligned}&\Pr(X_1 \leq x_1,\dots,X_n \leq x_n) = F(x_1,\dots,x_n) \\ &= C(F_1(x_1),\dots,F_n(x_n))\end{aligned} \tag{1}$$

を満たす関数 C が一意に存在する．

この C がコピュラと呼ばれる関数である．つまり, コピュラ C に周辺分布関数 $F_1,\dots,F_n$ を適用することで生成される $C(F_1,\dots,F_n)$ は, 周辺分布を区間 $[0,1]$ の一様分布とする同時分布関数である．これにより, 連続な多変量分布関数は, リスク・ファクター単独の挙動を表現する周辺分布関数 $F_1,\dots,F_n$ とそれらリスク・ファクター間の依存構造 (コピュラ C) に分解することが可能となる．

また, コピュラの密度関数として $c(u_1,\dots,u_n) = \partial^n C(u_1,\dots,u_n)/\partial u_1 \dots \partial u_n$, X_i の確率密度関数を $f_i(x)$, 同時分布関数 F の密度関数を f とすると, (1) 式から次式を得る．

$$f(x_1,\dots,x_n) = c(F_1(x_1),\dots,F_n(x_n))\prod_{i=1}^{n} f_i(x_i). \tag{2}$$

3.2　正規コピュラの定義

正規コピュラは, 多変量正規分布と同じ依存構造を持つコピュラである．確率変数 $X_1,\dots,X_n$ が, 相関行列を Σ とする n 変量標準正規分布に従うとき, その分布関数を $\Phi_n(x_1,\dots,x_n;\Sigma)$ と表すことにする．n 変量標準正規分布の周辺分布は (1 変量) 標準正規分布であることから, 1 変量標準正規分布の分布関数を $\Phi_1(\cdot)$ とすれば, スクラーの定理から,

$$\begin{aligned}&\Pr(X_1 \leq x_1,\dots,X_n \leq x_n) = \Phi_n(x_1,\dots,x_n;\Sigma) \\ &= C(\Phi_1(x_1),\dots,\Phi_1(x_n))\end{aligned}$$

のように, 各周辺分布関数を結び付けるコピュラ $C : [0,1]^n \to [0,1]$ が一意に存在する．このコピュラは, 多変量正規分布の各変量間の依存関係を示していることから, 「正規コピュラ」と呼ばれる．

正規コピュラの密度関数 $c(u_1,\dots,u_n)$ は, (2) 式より, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\omega} = (\omega_1,\dots,\omega_n)^{\mathrm{T}}$ とおき, 単位行列を $\boldsymbol{I}$ とすれば,

$$c(u_1,\dots,u_n) = \frac{1}{\sqrt{|\Sigma|}}\exp\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}(\Sigma^{-1} - \boldsymbol{I})\boldsymbol{\omega}\right). \tag{3}$$

ここで $\boldsymbol{\omega} = \Phi_1^{-1}(\boldsymbol{u})$, と表せる．正規コピュラの周辺分布を 1 変量標準正規分布以外の分布とすることで, 多変量正規分布とは異なる同時分布を得られる．

3.3 正規コピュラのパラメータ推定方法

正規コピュラに従う乱数を発生させるには, そのパラメータ (相関行列)Σ を別途推定する必要がある. ここでは, その推定に最尤法を用いる [3].

(3) 式により, ヒストリカル・データの数を N とした正規コピュラの対数尤度関数を解くと

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{\omega}^{j}\boldsymbol{\omega}^{j\mathrm{T}},$$

と表せる.

4 実証分析

4.1 実験概要

銀行業界 5 銘柄 (みずほ FG, 百五銀行, 三十三 FG, 名古屋銀行, 三菱 UFJFG) の 2020 年 1 月 1 日から 2020 年 6 月 30 日 (東京証券取引所の休場日は除く) までの終値データ [Yahoo!ファイナンス. https://finance.yahoo.co.jp/] の日次収益率データを用いて保有期間 1 日の VaR を算出する. 同業種間では株価の相関が強いと考えられることから 5 銘柄のポートフォリオを対象として検証を行った. まず各銘柄の日次収益率の周辺分布のパラメータを最尤法によって求めた. 次に求めた最尤推定量から AIC を用いて周辺分布を決定する. 次にコピュラのパラメータを最尤法によって求めた. 求めたコピュラのパラメータから 5 銘柄の日次収益率の同時分布関数を求める. ここからシミュレーションによって日次収益率分布を 1000 回の試行で作成し, VaR の算出を行う.

4.2 周辺分布の決定

各銘柄の周辺分布を決定するにあたって, 正規分布, コーシー分布, t 分布について最尤法によるパラメータ推定を行った. 3 つの分布はパラメータ数がそれぞれ異なることから, AIC を用いて互いに評価を行った. 算出した結果が表 1 である.

表 1 各分布の AIC

社名	正規	コーシー	t
みずほ FG	−547.64	−567.10	−576.20
百五銀行	−527.37	−514.85	−538.04
三十三 FG	−503.70	−491.80	−509.02
名古屋銀行	−480.31	−472.02	−491.10
三菱 UFJFG	−538.91	−542.20	−554.95

表 1 より, 銀行業界全 5 銘柄において AIC で考えても t 分布が最小の値をとったといえる. また, 正規分布は他の分布と比べ, AIC で大きい値をとっており裾の厚い収益率に対応しきれないことがわかる. そのため, コピュラを使用し, 周辺分布を任意の分布で仮定することで, モデルの当てはまりを改善できることがわかる. 以降では周辺分布を t 分布として検証した.

4.3 コピュラのパラメータ推定

銀行業界 5 銘柄のポートフォリオに対して, 正規コピュラを用いて, それらのパラメータを推定すると表 2 のとおりとなった.

表 2 正規コピュラのパラメータ

Σ	1	0.705	0.602	0.616	0.900
	0.705	1	0.781	0.758	0.682
	0.602	0.781	1	0.692	0.564
	0.616	0.758	0.692	1	0.604
	0.900	0.682	0.564	0.604	1

4.4 VaR の算出

表 2 のパラメータを正規コピュラに適用して, 1000 回の試行で日次収益分布を作成し, VaR を算出した. 算出法としてはモンテカルロ・シミュレーション法を用いて, シミュレーション結果を小さい順に並べ, パーセンタイル値を推計する手法を用いた. 算出結果を表 3 に示す.

表 3 銀行 5 銘柄のポートフォリオの VaR

コピュラ	VaR(95%)	VaR(99%)	VaR(99.9%)
正規	0.50	1.15	1.51

4.5 考察

表 2 から, 全体的に強い相関を持つといえる. みずほ FG と三菱 UFJFG の相関係数は 0.89987 と非常に高い値が算出された. みずほ FG と三菱 UFJFG は, 互いに独立しているが, 共に都市銀行であるためだと考えられる.

5 おわりに

5.1 まとめと今後の課題

コピュラを用いることで各変量間の依存関係をより詳細に表現することや, 各変量の周辺分布に任意の分布を仮定することが可能となる. また, 正規コピュラを用いてパラメータ推定を行った結果, 定量的に各変量間の依存関係を考察することが可能となる. 今後の課題として, 各銘柄の周辺分布を決定する際, 両側指数分布, SAS-normal 分布を加えての検証を行い, より精度の高い VaR の算出を行う.

参考文献

[1] 戸坂凡展, 吉羽要直. (2005). ”コピュラの金融実務での具体的な活用方法の解説”, 金融研究, Vol.24, No.2, pp.115–162.

[2] Alexander J. MCNeil, Rudiger Frey, Paul Embrechts (塚原英敦 訳)(2008)：『定量的リスク管理—基礎概念と数理技法—』. 共立出版, pp.44–70.

[3] Nelsen, R.B. (2007). An introduction to copulas. Springer.