

# ラトルバックの力学的シミュレーションと解析

2016SS079 高木雅斗

指導教員：杉浦洋

## 1 はじめに

通常、滑らかな剛体を机上で水平に回すと、回転の方向によらず滑らかに回転し続ける。ところがラトルバックと呼ばれるおもちゃは半楕円体のものであり、特定の方向に回しやすい性質を持っている。逆方向に回した場合、回転が不安定化してガタガタという縦揺れの振動 (rattle) が起こり、いったん回転を止めた後、はじめとは逆に回り始める。このような見かけは鏡映対称なのに明らかに非対称な動きをするラトルバックの特異な運動に興味を持った。

—昨年度の卒業研究で中村 [1] は、ラトルバックの運動方程式から常微分方程式の標準形を導いた。

昨年度の卒業研究で荒川 [2] は、中村の常微分方程式を数値的に解き、ラトルバックの運動の数値シミュレーションを行った。

本研究では、荒川の数値シミュレーションプログラムを検討し、機能を拡張し、さらに広範な条件下で数値実験を行い、ラトルバックの運動を解析する。また、3D プリントでラトルバックを作成し、その動きを数値シミュレーションと比較する。

## 2 ラトルバック (RB) の力学モデル

以下、ラトルバックを RB と略記する。重心の並進運動の方程式と重心周りの回転運動の方程式、および床と RB の摩擦の方程式から、RB の運動を支配する微分方程式の標準形を導く。

楕円体を高さ  $H$  で切断した RB 本体

$$S: f(s) = \frac{s^2}{\alpha^2} + \frac{t^2}{\beta^2} + \frac{u^2}{\gamma^2} - 1 \leq 0, \quad -\gamma \leq u \leq H \quad (1)$$

を考える。

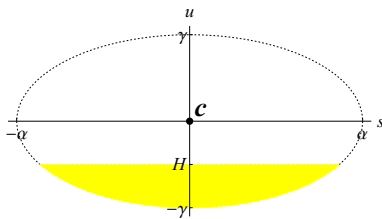


図1 RBの正面図

この質量を  $m_1$ 、比重を  $\rho$  とする。

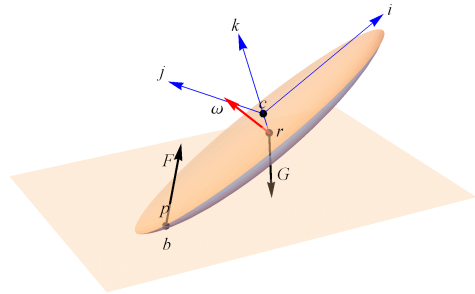
数値実験及び実機実験は、

$$\alpha = 10[\text{cm}], \beta = 4[\text{cm}], \gamma = 3[\text{cm}],$$

$$H = -0.5[\text{cm}], m_1 = 0.121[\text{kg}], \rho = 639.95[\text{kg}/\text{m}^3]$$

として行った。

RB は床の上を動摩擦係数  $\mu_1$  で滑るものとする。重力加速度を  $g = 9.8[\text{m}/\text{s}^2]$  とする。以下のように記号を設定する。



RBのモデル図

床のRBの接点:  $\mathbf{b} = (b_x, b_y, 0)$ ,  $\mathbf{b}_{xy} = (b_x, b_y)$ ,

RBの床との接点:  $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z) = \mathbf{b}$ ,

$$\mathbf{p}_{xy} = (p_x, p_y),$$

重心周りの角速度:  $\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ ,

重力ベクトル:  $\mathbf{G} = (0, 0, -mg)$ ,

床の抗力:  $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$ .

## 3 数値シミュレーション

剛体力学に基づいてRBの運動方程式

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) \quad (2)$$

を立てた。ここで  $\mathbf{x} = (\mathbf{b}_{xy}, \mathbf{v}_{xy}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \boldsymbol{\omega})$  である。

RBの力学的シミュレーションを Mathematica 上に実現し、数値実験を行った。

微分方程式の数値解法には、古典的4次ルンゲ・クッタ法を用いた。動摩擦係数  $\mu_1 = 0.1$  を基準として観察する。

初期値  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$  を

$$\mathbf{b}_{xy} = (0, 0), \mathbf{i} = \left( \frac{10}{\sqrt{101}}, 0, \frac{1}{\sqrt{101}} \right), \mathbf{j} = (0, 1, 0),$$

$$\mathbf{k} = \mathbf{i} \times \mathbf{j},$$

とし、 $\mathbf{v}_{xy}$  は重心の速度を0にするように設定する。また、時間ステップ  $dt = 0.25 \times 10^{-3}$  で  $t \in [0, 20]$  において方程式を解いた。数値実験では、主軸をずらすために、質量  $m_2 = 10[\text{g}]$  の2個の重りを  $(s_i, s_j, s_k) = (\pm 5.0[\text{cm}], \pm 1.0[\text{cm}], H)$  に取り付けた。

[実験 1](無反転) $\omega = (0, 0, 2\pi)$  である。時間  $t$  に対する  $\omega_x$ (青),  $\omega_y$ (オレンジ),  $\omega_z$ (黒) のグラフを図 3 に示す。  $\omega_z$  の符号は正のまま変わらない。すなわち、ラトルバックの反転は起こっていない。

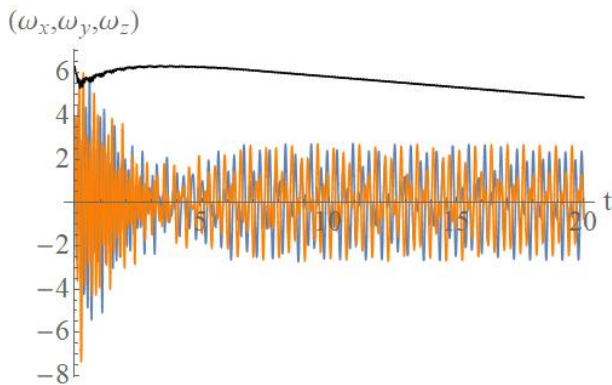


図 2 動摩擦係数  $\mu_1 = 0.1$  のときの  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$

[実験 2](反転) $\omega = (0, 0, -2\pi)$  である。時間  $t$  に対する  $\omega_x$ (青),  $\omega_y$ (オレンジ),  $\omega_z$ (黒) のグラフを図 3 に示す。  $t = 10$  で  $\omega_z$  の符号が交代している。すなわち、ラトルバックの反転が起こっている。

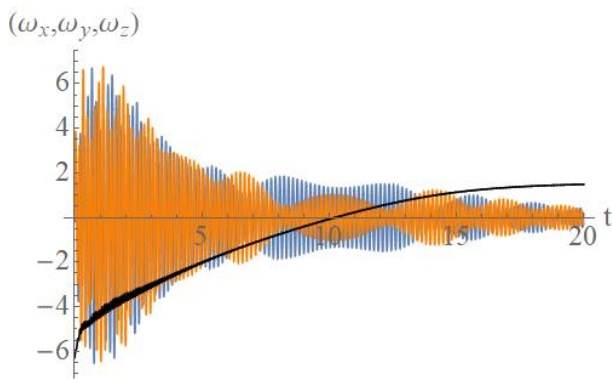


図 3 動摩擦係数  $\mu_1 = 0.1$  のときの  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$

[実験 3](動摩擦係数  $\mu_1$  との関係) この現象と動摩擦係数との関係の数値実験を行う。  $\omega = (0, 0, -2\pi)$  である。実験から  $0.05 \leq \mu_1 \leq 0.1$  で綺麗なラトルバック現象が起こることがわかった。また、それ以下だと現象は起こらず、それ以上だと反転を繰り返す現象が起こることがわかった。

#### 4 実機実験

[実験 4](3D プリンタでラトルバック作成) 今度は、シミュレーションプログラムをもとに 3D プリンタでラトルバックを作成してみた。まず試しに重りをつけずに回してみたところ、どちらの方向に回しても比較的綺麗に回った。

次に、1 個 6[g] の重りを長軸 6[cm], 短軸 2[cm] の位置で回してみた。結果、重り側の回転が安定し、逆に回すとラトルバック現象が起きた。また、重りの位置を逆にして

も同じ現象がみられた。回転速度や安定して回すか・がたつて回すかによって大きく変わった。更に動摩擦係数を大きくしたら、さっきよりも早くスピードが落ちるため早くがたつき始め、反転した。

次は、重りの位置を変えてみて現象がどうなるのか実験してみた。まず、長軸を 3[cm], 短軸を 1[cm] にしたところ、さっきと比べてがたつきも反転角速度も小さく、反転までの時間は遅くなった。次、長軸を 7[cm], 短軸を 2[cm] にしたところ、さっきと比べて反転角速度は大きくなった。

これらの実験によりラトルバック現象は、ラトルバックの対称軸と主軸がずれることにより起こる。また、摩擦が存在することが、現象発生の必要条件である。

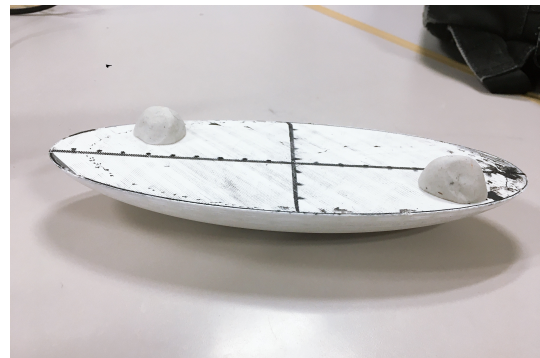


図 4 作成したラトルバック

#### 5 おわりに

本研究では、ラトルバックの不思議な運動を解明するため、ラトルバックの運動の観察をした。また、昨年度の荒川 [3] が作成した計算プログラムを検討・拡張し広範囲な条件で数値実験を行った。

Mathematica によるプログラムを作成し数値実験で、角速度が  $z$  成分のみになると、接点、重心が  $z$  軸上に並び、摩擦力のモーメントが 0 になる。したがって、摩擦による減速がなくなり、回転が永続する。また、プログラムをもとに実際に 3D プリンタでラトルバックを作成してみたところ、シミュレーションに対応する現象が起こった。実験によりラトルバック現象は、ラトルバックの対称軸と主軸がずれることにより起こる。また、摩擦が存在することが、現象発生の必要条件である。

#### 参考文献

- [1] 中村拓都 : ラトルバックの力学的シミュレーション, 南山大学理工学部卒業論文 (2018).
- [2] 荒川裕幹 : ラトルバックの力学的シミュレーション-Mathematica による-, 南山大学理工学部卒業論文 (2019).