複素多項式の全ての零点を求める Newton 法の初期点配置

2016SS073 鋤柄　有哉

指導教員：杉浦洋

1　はじめに

多項式の根を見つけることは数学ではとても重要な問題であり，様々な数値解法が提案されてきた．ここでは，多項式の全ての根を Newton 法で求める際の効率の良い初期点配置について論じる．

まず，Hubbard–Schreicher–Sutherland[1](本論文では H–S–S と略称) について述べる．H–S–S では，適当な平行移動とスケーリングにより，多項式の零点を全て単位円内部に置く．そして，多項式の次数 d のみにより定まり，多項式の係数には依存しない，初期値の集合 $\mathcal{S}_d$ を適切に取れば，$\mathcal{S}_d$ のすべての点を初期値として Newton 法を用いることにより，すべての零点が求まることを示した．一般の d 次多項式に対しては要素数 $\#\mathcal{S}_d \leq 1.11d\log^2 d$ の $\mathcal{S}_d$ が存在する．特に，実根のみを持つ d 次多項式に限定すれば $\#\mathcal{S}_d \leq 1.3d$ の $\mathcal{S}_d$ が設計できる．

実根のみを持つ多項式に限れば，H–S–S の方法は，十分実用的な全根探索アルゴリズムを提供する．本研究では，一般の多項式の全根を求めるアルゴリズムを研究した．

H–S–S の $\mathcal{S}_d$ から，初期点を 1 つづつ取り出し，Newton 法の収束点を求め，全ての根が発見された時点で停止するアルゴリズムを基本とする．$\mathcal{S}_d$ の初期点を偏角の順序で調べるより，ランダムな順序で調べる方が圧倒的に効率的であることがわかった．

最後に，Van der Corput 列 [2] を用いたさらに効率的な初期点配置法と全根探索アルゴリズムについて述べる．数値実験では，一般 d 次多項式に対し，多くの場合，$2d$ 以下の初期点数での全ての根を求めることができた．

2　H-S-S のアイデア

図 1 はある 7 次多項式 p の 7 個の零点 (白い十字) の鉢を描いたものである．色の濃さは，何回の Newton 反復で所定の零点近傍に到達したかを示し，回数が少ないほど色が濃い．白い大きな円は，単位円である．濃い色の中心が零点であり，零点を含む同色の連結成分が直接鉢である．単位円内部の Newton 法の振る舞いは，複雑で個性的である．

図 2 は同じものを Riemann 球面上で描いたものである．球面上部の北極の位置に ∞ があり，全ての直接鉢が集中している．単位円外部では Newton 法の振る舞いは単純である．

H–S–S[1] のアイデアは，ふるまいの単純な単位円の外側に原点中心の同心円をいくつか配置し，各同心円上に等間隔に点を配置し，$\mathcal{S}_d$ を構成することである．単位円の十分外側では，直接鉢の ∞ に伸びる枝は一定の経度幅を占める．その経度幅に見合う点密度を同心円上で実現することにより，確実に直接鉢の枝をとらえることができる．

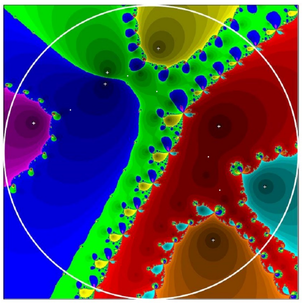

図 1　単位円内部の鉢図

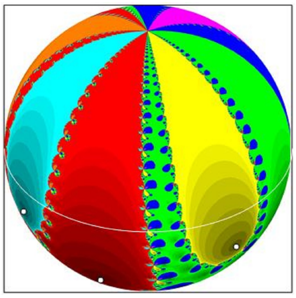

図 2　Riemann 球面の鉢図

2.1　H–S–S のレシピ

$\mathcal{S}_d$ を構成する具体的な H–S–S のレシピを述べる．

定義 2.1　(初期点集合 $\mathcal{S}_d$) H–S–S はパラメタ

$$R = 1 + \sqrt{2}, \quad \kappa = 1/2, \quad \alpha = 0.26632, \quad \beta = 8.32547,$$

により，

$$\begin{aligned} s &= \lceil \alpha \log d \rceil, \\ N &= \lceil \beta d \log d \rceil, \\ r_\nu &= R\left(\frac{d-1}{d}\right)^{(\nu-1/2)\kappa/s} \quad (1 \leq \nu \leq s), \\ \theta_j &= \frac{2\pi j}{N} \ (0 \leq j < N) \end{aligned}$$

を定義する．ここで，$\lceil x \rceil$ は天井関数で，実数 x より大きい整数の最小値である．これにより，

$$\mathcal{S}_d = \bigcup_{\nu=1}^{s} \{r_\nu \exp i\theta_j \,|0 \leq j < N\} \tag{1}$$

とする．s は初期点を配置する円の個数．N は一つの円に配置する初期値の数である．初期点の総数は，sN となる．

3 $\mathcal{S}_d$ による全根探索アルゴリズム

単根のみの多項式で実験した．次数 $d = 17, 34, 68$ とする．円周の数 s と 1 つの円周の初期点数 N の組みは，それぞれ，$(s, N) = (1, 401)$, $(1, 999)$, $(2, 2389)$ である．

各々の次数 d について，単位円板上の一様乱数で d 個の根を発生させ，それらのすべてを根とする d 次多項式を 10 個作成した．

3.1 節，3.2 節で述べる，2 つのアルゴリズムで，合計 30 個の多項式について，全ての根を求める実験を行った．

3.1 順番探索アルゴリズム

$\mathcal{S}_d$ から偏角の順に初期点を取り，Newton 法を適用していく．相異なる d 個の根が見つかったら，停止し，無駄な計算をなくす．使用した初期点の数を次の表に示す．d は問題の次数，No. は多項式番号である．

表 1 順番探索アルゴリズムの使用初期点数

d\No.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
17	325	351	354	332	382	316	378	333	386	356
34	949	975	974	894	954	908	931	934	956	910
68	2288	2346	2314	2316	2314	2287	2350	2358	2068	2251

使用初期点数は円周 1 つあたりの初期点数 N に近くなっており，円周ほぼ 1 周して初めて全根を発見したことになる．この方法では効率が悪い．

3.2 乱数探索アルゴリズム

順番探索のアルゴリズムでは，円周を 1 周し終わるまでは，選択された初期値の分布密度に大きな偏りが生じる．「乱数探索アルゴリズム」はこれを防ぐために，初期値の選択順序を乱数で決めるアルゴリズムである．

表 2 乱数探索アルゴリズムの使用初期点数

d\No.		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
17	最大値	119	106	82	145	120	131	95	86	81	107
	最小値	33	34	42	27	39	48	30	39	39	29
	平均値	67.3	67.5	60.0	66.4	62.0	78.8	56.5	64.8	58.8	63.6
	標準偏差	24.2	25.1	13.1	35.3	23.8	28.0	23.5	14.3	17.0	23.8
34	最大値	306	197	209	180	183	176	264	330	168	216
	最小値	114	117	106	101	110	109	93	91	108	94
	平均値	176.9	153.9	157.1	147.7	132.0	145.5	155.6	159.9	135.5	138.6
	標準偏差	60.1	35.8	33.2	29.2	21.2	22.7	58.0	73.3	22.4	39.3
68	最大値	580	525	687	398	406	641	625	566	1488	681
	最小値	211	215	302	267	205	299	192	272	705	246
	平均値	340.5	321.0	426.1	328.8	334.0	403.3	362.4	395.7	1028.2	337.4
	標準偏差	116.3	86.0	111.7	45.1	75.8	115.0	144.9	101.9	282.9	135.2

使用初期点数は，探索順序の影響を受けるので，探索順序を決める乱数を変え，それぞれの多項式について 10 回実験した．表 2 を見る限り，標準偏差が大きく，最大と最小では倍以上の差が出てしまう．実用するのは厳しいと思われる．平均値で見ると，使用標本点数は $d = 17$ では次数の 3 倍，$d = 37$ では次数の 4 倍，$d = 68$ では次数の 5 倍程度である．順序探索アルゴリズムよりは，圧倒的に速いことが分かった．

4 Van der Corput 探索アルゴリズム

乱数による初期点選択による初期点分布は，不規則な密度分布の濃淡を持つ．円周上の密度の一様性をできるだけ保ちつつ，しかも 1 点ずつ初期点を増やす方法に，Van der Corput 列 [2] がある．

非負整数 $k \geq 0$ の 2 進数展開を $k = \sum_{i=0}^{\infty} k_i 2^i$ とするとき，区間 $[0, 1)$ 上の Van der Corput 列 $\{\alpha_k\}_{k \geq 0}$ は，

$$\alpha_k = \sum_{i=0}^{\infty} k_i 2^{-i} \in [0, 1) \tag{2}$$

で定義される．これにより，H–S–S の円周 $C : |z| = R = 1 + \sqrt{2}$ 上の Van der Corput 列を

$$\beta_k = Re^{2\pi i \alpha_k} \qquad (k \geq 0) \tag{3}$$

を定義すれば，C 上の一様性のよい点列が得られる．

$\{\beta_k\}_{0 \leq k \leq n-1}$ は n が 2 の冪数なら等間隔点列となる．したがって，n が H–S–S の理論が保証する初期点数を超え，しかも 2 の冪数なら，このアルゴリズムは，n 点以下で全根を発見することが保証される．

2 節と同じ問題を解いた結果を次の表に示す．

表 3 Van der Corput アルゴリズムの使用初期点数

d\No.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
17	27	31	30	29	32	27	32	29	27	24
34	54	64	64	61	62	61	58	62	52	112
68	120	126	126	115	128	128	127	128	1043	126

表 3 を見る限り，比較的早く計算できており，このままでも十分に実用的であると思われる．実験した多項式の 9 割以上で，使用初期点数は次数 d の 2 倍以下である．Van der Corput 列を利用するのはとても効果的な手段である．

5 おわりに

本研究では，H–S–S の初期点集合 $\mathcal{S}_d$ を用いた，多項式の全根を速く，高精度に求めるアルゴリズムについて考察をした．そして，順番探索アルゴリズムと乱数探索アルゴリズムを考案した．

また，H–S–S の理論に基づき，Van der Corput 探索アルゴリズム，を考案した．

数値実験を行い，3 つのアルゴリズムの中で，Van der Corput 探索アルゴリズムがもっと最も優れており，多項式の全根が極めて効率的に計算できることを示した．

参考文献

[1] J. Hubbard, D. Schleicher, S. Sutherland: How to find all roots of complex polynomials by Newton's Mehtod, Invent. math., vol. 146, pp. 1-33(2001).

[2] J.G. Van der Corput: Verteilungsfunktionen I-VIII, Proc. Acad. Amsterdam, Vol.38, pp. 813 821, 1058-1066(1935), Vol. 39, p.10-19, 19-26, 149-153, 339-344, 489 -494, 579-590(1936).