自由な形状のコマの設計・製作

2016SC099　山本慶
指導教員：杉浦洋

1　はじめに

一般にコマといえば，回転体を思い浮かべる．しかし，剛体力学によれば，コマが必ずしも回転体である必要はなく，剛体力学で言うところの「対称ゴマ」であるという条件を満たしていれば，安定に回り続ける [1]．この研究の目的は，回転体でない対称ゴマの設計と製作である．

対称ゴマの条件を具体的に数式に表す．また，コマ本体をいくつかのパラメータを持った剛体として表し，対称ゴマとなる条件でパラメータを決定する．以上の設計方針に沿って，必要な理論的整備を行い，「3 質点ゴマ」と「極座標ゴマ」を考案し製作した．

2　対称ゴマ

2.1　慣性モーメントテンソル

質量 m の質点 $\boldsymbol{r}$ の慣性モーメントテンソル I は，

$$\begin{aligned} I &= mT(\boldsymbol{r}), & (1)\\ T(\boldsymbol{r}) &= T(x,y,z) \\ &= \begin{pmatrix} y^2+z^2 & -yx & -zx \\ -xy & z^2+x^2 & -xy \\ -zx & -yz & x^2+y^2 \end{pmatrix}, & (2) \end{aligned}$$

で表される．

n 質点からなる剛体の慣性モーメントテンソルは，質点の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_i$ $(1 \le i \le n)$，質量を m_i とすると，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{I} &= \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^{n} m_i T(\boldsymbol{r}_i) & (3) \end{aligned}$$

である．

また，3 次元の領域 A を占める密度 $\rho(\boldsymbol{r})$, $\boldsymbol{r} \in A$ の剛体の慣性モーメントテンソルは，

$$I = \int_A T(x,y,z)\rho(x,y,z)dxdydz \quad (4)$$

である．

2.2　剛体の回転中心の移動と慣性モーメントテンソル

定理 2.1　重心が原点 $\boldsymbol{r} = (0,0,0)$，質量 m の剛体 S の慣性モーメントテンソルを $I(\boldsymbol{0})$ とする．重心を $\boldsymbol{a} = (a,b,c)$ に平行移動したときの慣性モーメントテンソルは，

$$I(\boldsymbol{a}) = I(\boldsymbol{0}) + mT(\boldsymbol{a}) \quad (5)$$

となる．

2.3　対称ゴマとなる条件

n 質点からなる剛体 $\{(\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{m}_i)\}_{1\le i\le n}$ が z 軸を回転軸とする対称ゴマであるための条件は，

1. 重心が z 軸上にある条件

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}, \quad (6)$$

2. 慣性モーメントテンソルの条件

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} I_{12} \\ I_{13} \\ I_{23} \end{pmatrix} &= \sum_{i=1}^{n} m_i \begin{pmatrix} -x_i y_i \\ -x_i z_i \\ -y_i z_i \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}, & (7)\\ I_{11} &= \sum_{i=1}^{n} m_i (y_i^2 + z_i^2) \\ &= \sum_{i=1}^{n} m_i (z_i^2 + x_i^2) = I_{22} & (8) \end{aligned}$$

である．式 (7) は，(6) を用いて，

$$\sum_{i=1}^{n} m_i x_i y_i = 0, \quad (9)$$

と等価である．また，式 (8) は，

$$\sum_{i=1}^{n} m_i (x_i^2 - y_i^2) = 0 \quad (10)$$

と等価である．

以上をまとめて，次の定理が得られる．

定理 2.2　n 質点からなる剛体 $\{(\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{m}_i)\}_{1\le i\le n}$ が z 軸を回転軸とする対称ゴマであるための条件は，式 (6)，(9)，(10) である．

以下の定理も有用である．

定理 2.3　対称ゴマを z 軸方向に並行移動したものは対称ゴマである．

定理 2.4　対称ゴマを z 軸を中心に回転したものは対称ゴマである．

定理 2.5　対称ゴマを構成する質点の質量を一斉に a 倍したものは対称ゴマである．

定理 2.6　対称ゴマを構成する質点の座標を一斉に a 倍したものは対称ゴマである．

3　3 質点ゴマとその応用

3 質点からなる剛体が対称ゴマとなるための条件について述べる．

定理 3.1 (3 質点ゴマ) 3 質点 $m_1(\boldsymbol{r}_1), m_2(\boldsymbol{r}_2), m_3(\boldsymbol{r}_3)$ からなる剛体を S とする．任意の正数 $c > 0$ について，

$$\begin{aligned} r_1 &= (x_1, y_1, z_1) = c(0, -b(m_2+m_3), 0),\\ r_2 &= (x_2, y_2, z_2) = c(am_3, bm_1, 0),\\ r_3 &= (x_3, y_3, z_3) = c(-\,am_2, bm_1, 0),\\ a &= 1/\sqrt{m_2 m_3},\\ b &= 1/\sqrt{m_1(m_1+m_2+m_3)} \end{aligned} \tag{11}$$

とすると， S は z 軸を回転軸とする対称ゴマである．

質点は実現不可能だが，定理 2.1 より対称ゴマで代替できる．

定理 3.2 重心を原点とする m 個の対称ゴマ $K_i(1 \le i \le n)$ の質量を $m_i(1 \le i \le n)$ とする．各 K_i を重心位置が $\boldsymbol{r}_i$ となるように平行移動し，固定してできる剛体を K とする．このとき，n 個の質点からなる剛体 $S : \{(m_i, \boldsymbol{r}_i)\}_{1 \le i \le n}$ が対称ゴマなら，K も対称ゴマである．

定理 3.1，3.2 より次の系を得る．

系 3.3 (3 体ゴマ) 重心を原点とする 3 個の対称ゴマ K_1, K_2, K_3 の質量を m_1, m_2, m_3 とする．各 K_i を重心位置が $\boldsymbol{r}_i$ となるように平行移動して固定してできる剛体を K とする．このとき，式 (11) が成立するなら，K は対称ゴマとなる．

1 つの大円板ゴマと 2 つの半径の等しい小円板ゴマを系 3.3 に従って配置したコマが図 1 である．微小な円はコマの軸である．

この設計では，3 つの部品ゴマが接触する必要があり，自由度が低い．そこで，大きな対称ゴマから 3 体ゴマをくり抜く設計法を考えた．大きな円板ゴマから，2 つの円板ゴマと 1 つの十字ゴマで構成した三体ゴマをくり抜いたものが図 2 である．微小な円はコマの軸である．

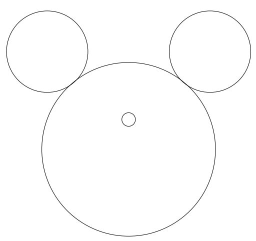

図 1 Mikey

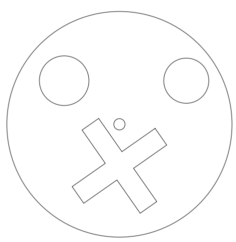

図 2 だんまり

4 極座標ゴマ

極座標 $(x, y) = r(\cos t, \sin t)$ で表された領域

$$D : 0 \le r \le f(t), 0 \le t \le 2\pi \tag{12}$$

を平面形状とするコマ を考える．簡単のため，面密度を 1 とする．このコマが， z 軸を軸とする対称ゴマとなる条件は，定理 2.2 より，

$$\int_D x dxdy = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} f(t)^3 \cos t dt = 0,$$

$$\begin{aligned} \int_D y dxdy &= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} f(t)^3 \sin t dt = 0,\\ \int_D xy dxdy &= \frac{1}{8}\int_0^{2\pi} f(t)^4 \sin 2t dt = 0,\\ \int_D (x^2-y^2) dxdy &= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} f(t)^4 \cos 2t dt = 0, \end{aligned}$$

である．これを整理すると，

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} f(t)^3 \cos t dt = 0,\\ &\int_0^{2\pi} f(t)^3 \sin t dt = 0,\\ &\int_0^{2\pi} f(t)^4 \cos 2t dt = 0,\\ &\int_0^{2\pi} f(t)^4 \sin 2t dt = 0 \end{aligned} \tag{13}$$

となる．これらは $f(t)^3$，$f(t)^4$ の Fourier 係数に関する条件である．

三角多項式，

$$f(t) = 3 + \cos 3t + \sin 10t$$

が条件 (13) を満たすことは，簡単に示せる．ゆえに領域 (12) は対称ゴマを定義する (図 3)．

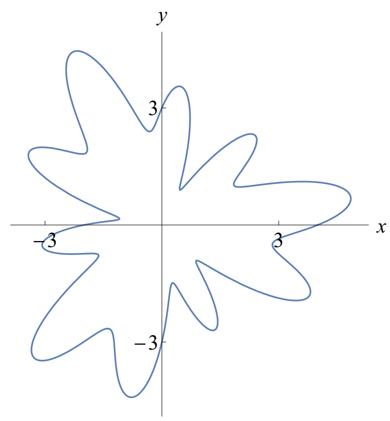

図 3 ゆがみ天使

5 おわりに

剛体が対称ゴマになる具体的な条件を導いた．また，対称ゴマの設計に有用ないくつかの定理を導いた．

それに基づき，コマの設計法として，「3 質点ゴマ」と「極座標ゴマ」を考案した．これらのコマのパラメータを調整し，アクリル製のコマをいくつか製作し，安定に回ることを確認した．

参考文献

[1] 十河清・和達三樹・出口哲生：「ゼロからの力学 II 」．岩波書店，東京（2013）．