

# 線形計画法を用いた多倍長計算による最良有理式近似

2015SS011 八谷 和真

指導教員 杉浦 洋

## 1 はじめに

与えられた区間  $[a, b]$  における関数  $f(x)$  を計算するために,  $f(x)$  の有理近似が使われる. 次数を固定したとき, 区間  $[a, b]$  における絶対誤差の最大値が最小となる有理近似を最良近似という. 有理関数近似を構成する方法は, 補間法, Padé 近似などがあるが, 次数を固定した場合, 最も誤差の小さい最良近似を取り上げる.

最良有理近似式を微分補正アルゴリズムによって求めるプログラムを Mathematica 上に実装する. 倍精度の最良近似式を得るには, 多倍長計算を必要とする. 微分補正アルゴリズムで用いられる, 線形計画法の多倍長プログラムを自作する. Mathematica の線形計画法関数 LinearProgramming はバグのため多倍長計算ができないからである. このため, 過去の研究 [1], [3] では倍精度以上の最良近似式が設計できなかった.

## 2 最良近似における Chebyshev の定理

区間  $[a, b]$  において, 連続関数  $f(x)$  を次数  $(m, k)$  の既約な有理式

$$f_{mk}(x) = \frac{p_m(x)}{q_k(x)} = \frac{\sum_{j=0}^m a_j x^j}{\sum_{j=0}^k b_j x^j} \quad (1)$$

で近似する問題を考える [1]. 誤差の指標を区間における最大絶対誤差

$$r_{mk} = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - f_{mk}(x)| \quad (2)$$

とする. 次数  $(m, k)$  を固定したとき, 最大絶対誤差  $r_{mk}$  を最小にする有理関数近似  $f_{mk}(x)$  を最良近似という [2].

### 2.1 Chebyshev の定理

最良近似に対する Chebyshev の定理を述べる. [定理 1](Chebyshev の定理) 有限区間  $[a, b]$  における連続関数  $f(x)$  の  $(m, k)$  次最良近似は存在して一意である. その最良近似式が実質  $(m - \nu, k - \mu)$  次であったとして

$$f_{mk}^*(x) = \frac{\sum_{j=0}^{m-\nu} a_{j+\nu} x^j}{\sum_{j=0}^{k-\mu} b_{j+\mu} x^j} = \frac{p_m^*(x)}{q_k^*(x)} \quad (3)$$

とする. ここで,  $a_m, b_k \neq 0$  である. そして, その誤差を

$$e_{mk}^*(x) = f_{mk}^*(x) - f(x)$$

と書く. また, その最大絶対誤差を  $r_{mk}^*$  とし,  $r_{mk}^* \neq 0$  を仮定する.

このとき, 整数  $L = m + k + 2 - d$ ,  $d = \min(\mu, \nu)$  に対し, 区間  $[a, b]$  の点列  $\zeta_1 < \dots < \zeta_L$  が存在して,

$$(1) |e_{mk}^*(\zeta_i)| = r_{mk}^* \quad (1 \leq i \leq L)$$
$$(2) e_{mk}^*(\zeta_i) e_{mk}^*(\zeta_{i+1}) < 0 \quad (1 \leq i < L)$$

である. //

$r_{mk}^*$  を最良近似度という. 最良近似式の誤差  $e_{mk}^*(x)$  は絶対値が  $r_{mk}^*$  で符号の交代する  $L$  個の極値点をもつ. とくに,  $k = 0$  の多項式近似では  $L = m + 2$  である. なる多項式  $a, b$  が存在する. //

### 2.2 最良近似度の評価

次の定理は, 任意の有理近似の誤差特性から最良近似の近似度を評価するものである.

[定理 2]

$$f_{mk}(x) = \frac{p_m(x)}{q_k(x)} = \frac{\sum_{j=0}^{m-\nu} a_{j+\nu} x^j}{\sum_{j=0}^{k-\mu} b_{j+\mu} x^j} \quad (4)$$

を既約とし, 誤差  $f(x) - f_{mk}(x)$  が区間  $[a, b]$  で有限であるとする.

さらに  $L = m + k + 2 - d$ ,  $d = \min(\mu, \nu)$ , 区間  $[a, b]$  の点列  $x_1 < x_2 < \dots < x_L$  と,  $\lambda_i (1 < i < L)$  について

$$f(x_i) - f_{mk}(x_i) = (-1)^i \lambda_i \quad (i = 1, \dots, L), \quad (5)$$

と仮定する.

$g_{mk}(x) = p_m(x)/q_k(x)$  を  $(m, k)$  次以下の分子と分母の  $f(x)$  に対する有理近似とし,

$$G_{mk} = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - g_{mk}(x)| \quad (6)$$

とすると

$$G_{mk} \geq \min_i |\lambda_i| \quad (7)$$

が成立する.

$g_{mk}(x) = f_{mk}^*(x)$  とすると, この定理は最良近似における絶対最大誤差が定理の点列  $\{\lambda_i\}$  における最小絶対値より大きいと言える. 最良近似度は  $f_{mk}(x)$  の最大絶対誤差より確かに小さいので, 定理の条件を満たす近似  $f_{mk}(x)$  から最良近似度の上界と下界,

$$\min_i |\lambda_i| \leq r_{mk}^* \leq \max_{x \in [a, b]} |f(x) - f_{mk}(x)| \quad (8)$$

を得る.

### 3 微分補正アルゴリズム

#### 3.1 微分補正アルゴリズムの構成

微分補正アルゴリズム [2] は、近似区間  $[a, b]$  に  $N$  個の観測点  $x_i \in [a, b] (1 \leq i \leq N)$  を取り、

$$r_{mk} = \max_{1 \leq i \leq N} |f(x_i) - f_{mk}(x_i)| \quad (9)$$

を最小とする  $f_{mk}(x) = f_{mk}^*(x)$  を求める。観測点の密度が十分高ければ  $f_{mk}^*(x)$  は最良近似にきわめて近いと期待できる。(9) は  $f_{mk}(x)$  の係数に関する非線形最小化問題であるので、 $f_{mk}^*(x)$  の第  $s$  近似  $f_{mk}^{(s)}(x)$  を改良して、第  $s+1$  近似  $f_{mk}^{(s+1)}(x)$  を作るアルゴリズムを考える。ここで、

$$r_{mk}^{(s)} = \max_{1 \leq i \leq N} |f(x_i) - f_{mk}^{(s)}(x_i)| \quad (10)$$

とする。微分補正アルゴリズムでは、(9) の代わりに、

$$w = \max_{1 \leq i \leq N} \frac{q_k(x_i)}{q_k^{(s)}(x_i)} (|f(x_i) - f_{mk}(x_i)| - r_{mk}^{(s)}) \quad (11)$$

を最小化する  $f_{mk}(x)$  を  $f_{mk}^{(s+1)}$  とする。 $f_{mk}^{(s)}(x)$  が十分  $f_{mk}^*(x)$  に近く、 $q_{mk}^{(s)} \cong q_{mk}^*(x) \cong q_{mk}^{(s+1)}$  なら、 $q_{mk}^{(s+1)}/q_{mk}^{(s)} \cong 1$  ゆえ、(11) の最小化問題は (9) の最小化問題の近似問題と考えられる。

(11) は制約条件：全ての  $1 \leq i \leq N$  で、

$$wq_k^{(s)}(x_i) + r_{mk}^{(s)}q_k(x_i) \pm R_i \geq 0, \quad (12)$$

$$R_i = f(x_i)q_k(x_i) - p_m(x_i)$$

の元で  $w$  を最小化する線形計画問題であり、これを解いて、

$$p_m(x) = a_0 + \sum_{i=1}^k a_i x^i,$$

$$q_k(x) = 1 + \sum_{i=1}^k b_i x^i$$

の係数  $a_i (0 \leq i \leq m)$ ,  $b_i (1 \leq i \leq k)$  を求める。

#### 4 数値実験

行列  $A \in R^{m \times n}$  とベクトル  $\mathbf{b} \in R^m$ ,  $\mathbf{c} \in R^n$ ,  $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$  で定義された、制約条件  $Ax \geq \mathbf{b}$ ,  $x \geq \mathbf{0}$  のもとで、 $f(x) = \mathbf{c}^T x$  を最小化する線形計画問題を解くシンプレックス法の、任意多倍長プログラムを Mathematica 上に実装した。それを用いて、微分補正アルゴリズムにより最良近似有理式を求める Mathematica プログラムを作成した。

区間  $[-1, 1]$  上で、4 つの関数  $2^{x/2}$ ,  $\cos(\pi(x+1)/8)$ ,  $\sin(\pi(x+1)/8)$ ,  $\log_2((x+3)/2)$  の倍精度最良有理式近似を求める実験を行なった。これらの関数は、それぞれ初等関数  $e^x$ ,  $\cos x$ ,  $\sin x$ ,  $\log x$  の倍精度関数を設計するための基本関数である。ここでは、 $f(x) = 2^{x/2}$  に関する実験結果のみを報告する。

下表に、今回作成したプログラムで得られた最良近似  $r_{km}(x)$  の  $-\log_{10}$  (最大絶対誤差) を示す。この値は、 $r_{km}(x)$  が小数点以下何桁正しいかを表す。

$r_{km}(x)$  の計算量  $n = m + k$  の小さい順に表を調べ、最初に精度が 16 桁を超える近似式を含む  $n$  を探す。その  $n$  で最も精度の良い近似式を選択する。

この実験では、 $n = 10$  の線で 16 より大きい数値が現れ、その中では  $(m, k) = (5, 5)$  の 18.1 が最大である。これにより、

$$r_{5,5}(x)$$

を倍精度計算用の最良有理近似式として採用する。

表 1  $m, k$  に対する  $-\log_{10}$  (最大絶対誤差)

$m \setminus k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	3.1	4.6	6.2	7.8	9.5	11.2	13.0	14.8	16.7
2	4.6	6.4	8.1	9.9	11.7	13.6	15.4	17.3	
3	6.2	8.1	10	11.9	13.9	15.8	17.8		
4	7.8	9.9	11.9	14.0	16.0	18.0			
5	9.5	11.7	13.9	16.0	18.1				
6	11.2	13.6	15.8	17.4					
7	13.0	15.4	17.8						
8	14.8	17.3							
9	16.7								

採用した最良有理近似式  $r_{5,5}(x)$  の誤差  $y = r_{5,5}(x) - 2^{x/2}$  のグラフを図 1 に示す。

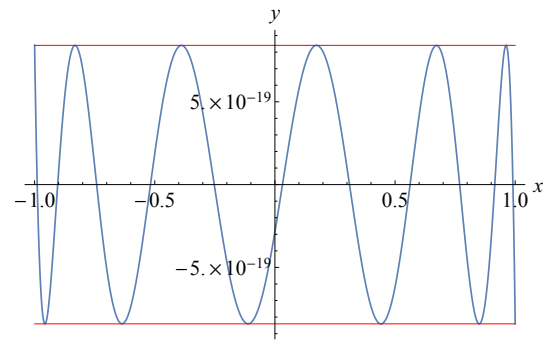


図 1  $y = r_{5,5}(x) - 2^{x/2}$

#### 5 おわりに

Mathematica 上に最良有理近似式を求める微分補正アルゴリズムを実装した。微分補正アルゴリズムで用いる、線形計画法プログラムを自作し、任意多倍長で動作するようにした。このことにより、任意の精度で最良有理近似式の分子分母の係数を計算できるようになった。

#### 参考文献

- [1] 野村 健太：Chebyshev 多項式基底を用いた線形計画法による最良有理近似式の構成，南山大学 情報理工学部 情報システム数理学科 2016 年度卒業論文，(2017)。
- [2] Anthony Ralston and Philip Rabinowitz：A First Course in Numerical Analysis, Second Edition, Dover Publications, New York, (2001)。
- [3] 吉戸成吾：線形計画法による最良有理近似式の構成，南山大学数理工学部情報システム数理学科 2011 年度卒業論文，(2012)。