

ゆで卵の直立回転

2014SC061 岡本大志

指導教員：杉浦洋

1 はじめに

ゆで卵を横にして回転させると立ち上がり、直立回転する。この運動について興味を持った。一昨年の卒業研究で杉山 [1] はゆで卵の運動方程式から常微分方程式の標準形を導く方法を示した。しかし、それを用いて計算機プログラムを作成し力学シミュレーションを行うことは出来なかった。本研究では杉山の方法を再度検討し、ゆで卵の回転運動のシミュレーションプログラムを Mathematica 上に実現した。それにより直立運動を再現し、詳しく観察した。

2 ゆで卵の運動方程式

回転楕円体のゆで卵を考える。ゆで卵の局所座標の原点を $\mathbf{c} = (c_x, c_y, c_z)$ 、正規直交軸ベクトルを $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ とする。回転楕円体としての回転軸は \mathbf{k} である。 $\mathbf{s} = (s, t, u)$ はゆで卵の局所座標である。質量を m とする。重心を $\mathbf{r} = (r_x, r_y, r_z)$ 、その局所座標を $\mathbf{r}_L = (r_i, r_j, r_k)$ とする。

$$\mathbf{r} = \mathbf{c} + r_i \mathbf{i} + r_j \mathbf{j} + r_k \mathbf{k} = \mathbf{c} + A \mathbf{r}_L, \quad (1)$$

$$U = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) \in \mathbb{R}^3 \quad (2)$$

である。

ゆで卵は床の上を動摩擦係数 μ_1 で滑るものとする。重力加速度を $g = 9.8[m/s^2]$ とする。以下のように記号を設定する。

床のゆで卵の接点： $\mathbf{b} = (b_x, b_y, 0)$ 、 $\mathbf{b}_{xy} = (b_x, b_y)$ 、

ゆで卵の床との接点： $\mathbf{p} = (p_x, p_y, 0) = \mathbf{b}$ 、

$$\mathbf{p}_{xy} = (p_x, p_y),$$

重心周りの角速度： $\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ 、

重力ベクトル： $\mathbf{G} = (0, 0, -mg)$ 、

床の抗力： $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$ 。

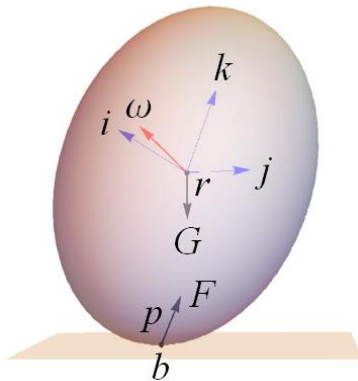


図1 ゆで卵のモデル図

ゆで卵の運動は6つのベクトル $\mathbf{b}, \mathbf{v} = \dot{\mathbf{b}}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \boldsymbol{\omega}$ の時間変化で記述される。これらを支配するのは並進運動の方程式、摩擦の方程式、回転運動の方程式

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} + \mathbf{G}, \quad (3)$$

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{N} = (\mathbf{b} - \mathbf{r}) \times \mathbf{F}, \quad (4)$$

$$\mathbf{F}_{xy} = \mu_1 F_z \frac{-\mathbf{p}_{xy}}{\|\mathbf{p}_{xy}\|} \quad (5)$$

である。これらから

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{b}, \mathbf{v}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \boldsymbol{\omega}) \quad (6)$$

を従属変数とする常微分方程式の標準形

$$\dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x}) \quad (7)$$

を導き、常微分方程式の数値解法を用いて解くことにより、数値シミュレーションを実現することができる。

3 数値実験

卒業論文5章のアルゴリズムにより式(7)の右辺関数を Mathematica 上に実現し、ゆで卵の力学的シミュレーションを行った。今回は微分方程式の数値解法には、古典的4次ルンゲ・クッタ法を用いた。

[実験1] 解の精度を確かめるため動摩擦係数 $\mu_1 = 0$ のときの力学的エネルギーの保存を観察する。

初期値 $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$ を

$$\mathbf{b}_{xy} = (0, 0), \mathbf{v}_{xy} = (1, 0), \mathbf{i} = (1, 0, 0), \mathbf{j} = (0, 1, 0),$$

$$\mathbf{k} = (0, 0, 1), \boldsymbol{\omega} = (0, 0, 40 \times 2\pi)$$

で設定し、時間ステップ $dt = \frac{1}{2000}$ で $t \in [0, 2]$ において方程式を解いた。力学的エネルギー=運動エネルギー+ポテンシャルエネルギーの変化をグラフ(図2)に表したが、コマの力学的エネルギー保存されている。実際、 $t = 0$ から $t = 2$ までに力学的エネルギーは0.06267164557で変化しなかった。有効数字10桁の範囲でエネルギーは保存されている。

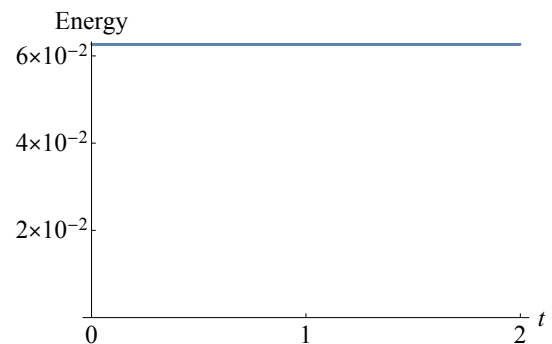


図2 動摩擦係数 $\mu_1 = 0$ のときのエネルギー保存

[実験 2] 動摩擦係数 $\mu_1 = 0.5$ として観察する．初期値 $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$ を

$$\mathbf{b}_{xy} = (0, 0), \mathbf{i} = (1, 0, -3)/\sqrt{10}, \mathbf{j} = (0, 1, 0),$$

$$\mathbf{k} = (3, 0, 1)/\sqrt{10}, \boldsymbol{\omega} = (0, 0, 40 \times 2\pi)$$

で設定し， \mathbf{v}_{xy} は重心の初速度が 0 になるように設定する．時間ステップ $dt = \frac{1}{2000}$ で $t \in [0, 2]$ において方程式を解いた． k_z ， $\|\boldsymbol{\omega}\|$ ，力学的エネルギー，ポテンシャルエネルギーの変化をそれぞれ図 3，4，5，6 に示す．

図 3 を見ると k_z は時間が経過するごとに大きくなって $k_z=1.0$ で安定することが読み取れる．このことから卵が徐々に倒立していき最後は直立することが分かる．

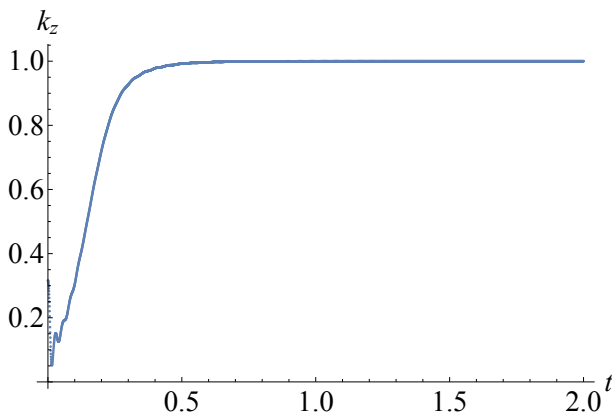


図 3 動摩擦係数 $\mu_1 = 0.5$ のときの k_z

次に図 4 を見ると角速度が徐々に増えていき $t=0.3$ 付近で安定するのが読み取れる．卵が倒立していくにつれ回転軸から卵の先の長さが短くなるのでその分角速度が増えている．卵が直立してからは回転軸から卵の先の長さが変わらないので角速度も一定になる．

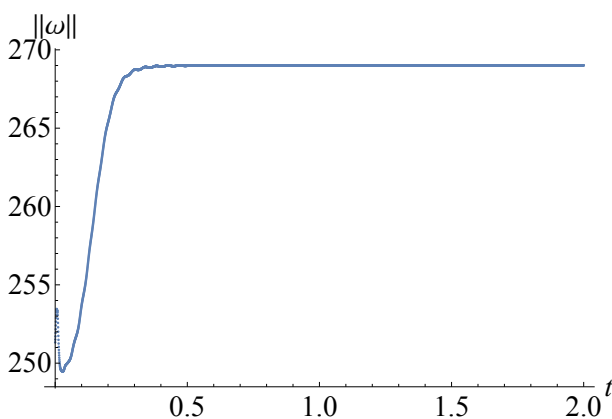


図 4 動摩擦係数 $\mu_1 = 0.5$ のときの $\|\boldsymbol{\omega}\|$

次に図 5 を見ると力学的エネルギーが $t=0.3$ 付近まで急速に減少しそれ以降安定していることが分かる．これは直立していく過程で卵の接触点が円状に移動するので摩擦の影響を受け力学エネルギーが下がっている．卵が直立し

てからは接触点が移動せずその場で回り続けているので摩擦の影響をほとんど受けず力学的エネルギーが一定に保たれる．

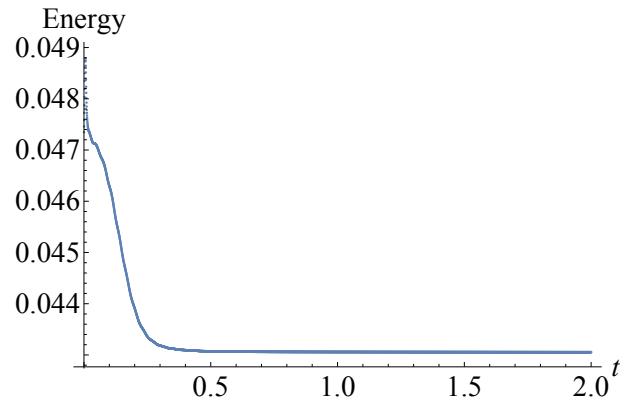


図 5 動摩擦係数 $\mu_1 = 0.5$ のときのエネルギー

最後に図 6 を見ると $t=0.3$ 付近まで増大しそれ以降一定に保たれているのが分かる．これは重心の位置が徐々に上昇し卵が直立してからは安定していることを示している．

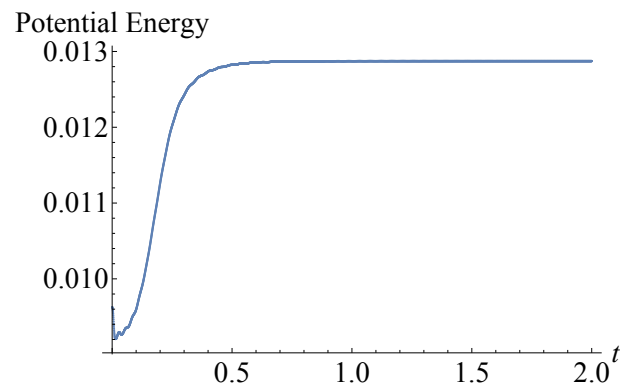


図 6 動摩擦係数 $\mu_1 = 0.5$ のときのポテンシャルエネルギー

4 おわりに

本研究ではゆで卵の運動を解明するため，剛体力学について詳しく学び，それによりゆで卵の状態を表す微分方程式を導出した．

これよりゆで卵の運動を数値シミュレーションすることが可能となった．

ゆで卵は，シミュレーションにおいて，長軸が地面と平行に近い状態から立ち上がり，直立回転した．実験は成功した．

参考文献

- [1] 杉山裕紀：「ゆで卵の倒立回転」，南山大学理工学部機械電子制御工学科卒業論文 (2018)．