# 折り紙

2012SE120 小室雄基

指導教員：杉浦洋

## 1 はじめに

平らな紙に滑らかな曲線を書きそれに沿って折ると，曲線とそれを境界として接続するする滑らかな 2 曲面が空間に立ち上がる．本研究ではこの様な空間図形を「折り紙」と称し，その数学的な性質を調べる．尾関 [1] の折り紙理論と設計法を整備し，3D プリンタで作品を造形する．

## 2 柱面

柱面 (図 1) は平らな紙を曲げてできる曲面 (可展面) の一種であり，特定の平行線群 (母線) の平行性を保存している [2]．平行線群の単位方向ベクトル $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$, $||\boldsymbol{a}|| = 1$ を母線ベクトルと言う．柱面 $A$ は

$$
\begin{aligned}
A &: \boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}(s) + t\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3 \quad (s, t \in \mathbb{R}) \\
C &: \boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}(s) \in \mathbb{R}^3 \qquad (s \in \mathbb{R})
\end{aligned}
$$

とパラメタ表示される．空間曲線 $C$ は準線と呼ばれる．

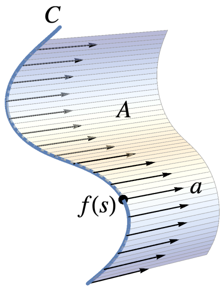


図 1　柱面

### 2.1 共通準線を折れ線とした柱面折り紙

柱面折り紙の展開図は，共通準線 $\bar{C} : \bar{\boldsymbol{x}} = \bar{\boldsymbol{f}}(s) \in \mathbb{R}^2$ で平面を 2 柱面 $\bar{A}$, $\bar{B}$ に分割したものである．展開図 (図 2) のパラメタ表示を，

$$
\begin{aligned}
\bar{A} &: \bar{\boldsymbol{x}} = \bar{\boldsymbol{f}}(s) + t\bar{\boldsymbol{a}}, \\
\bar{B} &: \bar{\boldsymbol{x}} = \bar{\boldsymbol{f}}(s) + t\bar{\boldsymbol{b}},
\end{aligned}
$$

対応する折り紙のパラメタ表示を，

$$
\begin{aligned}
A &: \boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}(s) + t\boldsymbol{a}, \\
B &: \boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}(s) + t\boldsymbol{b}
\end{aligned}
$$

とする．図 3 には，折れ目 $C$ を稜線として折る山折を示す．$C$ を谷線として折る谷折もある．

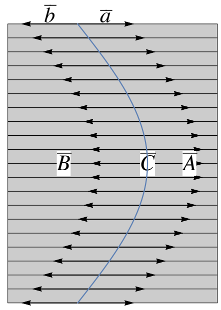


図 2　展開図

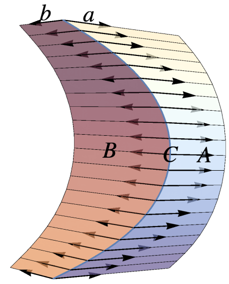


図 3　折り紙 (山折)

## 3 折り紙の空間形状の決定

展開図を決定する母線ベクトル $\bar{\boldsymbol{a}}$, $\bar{\boldsymbol{b}}$, 準線関数 $\bar{\boldsymbol{f}}(s)$ と，折り方を指示する母線ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, および山折・谷折の指定，から，折上がった折り紙の空間形状を決定することが，本論文の理論的な主題である．

まず，展開図の点 $\bar{\boldsymbol{f}}(s)$ の近傍 (図 4) と，折り紙の点 $\boldsymbol{f}(t)$ の近傍 (図 5) の局所的な対応を見る．図で

$$
\bar{\boldsymbol{d}} = \frac{\dot{\bar{\boldsymbol{f}}}(s)}{||\dot{\bar{\boldsymbol{f}}}(s)||}, \qquad \boldsymbol{d} = \frac{\dot{\boldsymbol{f}}(s)}{||\dot{\boldsymbol{f}}(s)||},
$$

はそれぞれ，点 $\bar{\boldsymbol{f}}(s)$ における $\bar{C}$ の単位接線ベクトル，点 $\boldsymbol{f}(s)$ における $C$ の単位接線ベクトル，である．

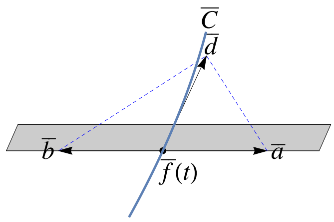


図 4　展開図

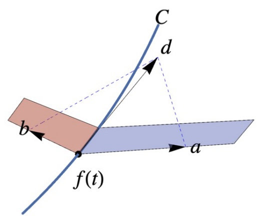


図 5　折り紙 (山折)

展開図でベクトル $\bar{\boldsymbol{d}}$ で仕切られたリボンは，ベクトル $\bar{\boldsymbol{d}}$ で折ったリボンと対応する．$\bar{\boldsymbol{a}}$, $\bar{\boldsymbol{d}}$, $\bar{\boldsymbol{b}}$ と $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{b}$ が方向ベクトルであることを考慮すると，座標原点を $\bar{\boldsymbol{o}} \in \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{o} \in \mathbb{R}^3$ とし，展開図上の四角形 $\bar{\boldsymbol{o}}\bar{\boldsymbol{a}}\bar{\boldsymbol{d}}\bar{\boldsymbol{b}}$ をベクトル $\bar{\boldsymbol{d}}$ で折れば折り紙上の四角形 $\boldsymbol{oadb}$ となる．

ゆえに，山折・谷折を決めれば，3 次元ベクトル $\boldsymbol{d}$ が一意に決まる．

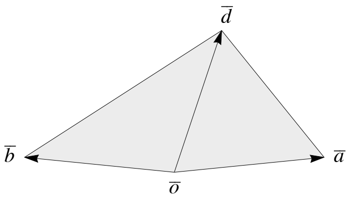


図 6　展開図

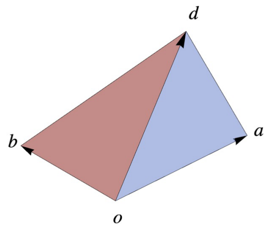


図 7　折り紙 (山折)

### 3.1　Orid 関数

2 次元単位ベクトル $\bar{\boldsymbol{a}}$, $\bar{\boldsymbol{b}}$, $\bar{\boldsymbol{d}}$ と 3 次元単位ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{d}$ の関係を，

$$\boldsymbol{d} = \mathrm{Orid}(\bar{\boldsymbol{a}}, \bar{\boldsymbol{b}}, \bar{\boldsymbol{d}}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, y)$$

で表す．$y$ は山折 $(y = 1)$，谷折 $(y = -1)$ を指示するフラグである．幾何学的な考察により，Orid 関数の出力 $\boldsymbol{d}$ に対する，次の簡単な計算法を発案した．

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{c} &= \frac{\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}}{||\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}||};\\
s &= \frac{(\bar{\boldsymbol{a}}, \bar{\boldsymbol{d}}) - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})(\bar{\boldsymbol{b}}, \bar{\boldsymbol{d}})}{1 - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})^2};\\
t &= \frac{(\bar{\boldsymbol{b}}, \bar{\boldsymbol{d}}) - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})(\bar{\boldsymbol{a}}, \bar{\boldsymbol{d}})}{1 - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})^2};\\
u &= y\sqrt{1 - s^2 - t^2 - 2st(\bar{\boldsymbol{a}}, \bar{\boldsymbol{b}})}\ ;\\
\boldsymbol{d} &= s\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b} + u\boldsymbol{c};
\end{aligned}$$

この計算法では，ベクトル $\boldsymbol{d}$ を 3 次元基底 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ で展開している．$s$, $t$, $u$ は展開係数である．

### 3.2　$\boldsymbol{f}(s)$ の決定

定義より，

$$\begin{aligned}
\frac{\dot{\boldsymbol{f}}(s)}{||\dot{\boldsymbol{f}}(s)||} &= \boldsymbol{d} = \mathrm{Orid}(\bar{\boldsymbol{a}}, \bar{\boldsymbol{b}}, \bar{\boldsymbol{d}}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, y)\\
&= \mathrm{Orid}\left(\bar{\boldsymbol{a}}, \bar{\boldsymbol{b}}, \frac{\dot{\bar{\boldsymbol{f}}}(s)}{||\dot{\bar{\boldsymbol{f}}}(s)||}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, y\right).
\end{aligned}$$

展開図と折り紙で準線の長さは変わらないので $||\dot{\boldsymbol{f}}(s)|| = ||\dot{\bar{\boldsymbol{f}}}(s)||$．ゆえに，両辺に $||\dot{\bar{\boldsymbol{f}}}(s)||$ を掛けて，

$$\dot{\boldsymbol{f}}(s) = ||\dot{\bar{\boldsymbol{f}}}(s)||\mathrm{Orid}(\bar{\boldsymbol{a}}, \bar{\boldsymbol{b}}, \frac{\dot{\bar{\boldsymbol{f}}}(s)}{||\dot{\bar{\boldsymbol{f}}}(s)||}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, y).$$

右辺は全て既知である．これを積分して，

$$\boldsymbol{f}(s) = \boldsymbol{p} + \int_0^s ||\dot{\bar{\boldsymbol{f}}}(t)||\mathrm{Orid}\left(\bar{\boldsymbol{a}}, \bar{\boldsymbol{b}}, \frac{\dot{\bar{\boldsymbol{f}}}(t)}{||\dot{\bar{\boldsymbol{f}}}(t)||}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, y\right) dt \tag{1}$$

である．初期点 $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{f}(0) \in \mathbb{R}^3$ は積分定数として任意に取れる．

## 4　柱面で構成された折り紙作品

展開図で準線関数 $\bar{\boldsymbol{f}}(s) = \left(\frac{1}{4}\sin \pi s, s\right)$ $(0 \leq s \leq 5)$，母線ベクトル $\bar{\boldsymbol{a}} = (1, 0)$,　$\bar{\boldsymbol{b}} = (-1, 0)$ とし，折り紙の母線ベクトル $\boldsymbol{a} = (1, 0, 0)$,　$\boldsymbol{b} = (0, 1, 0)$，折り紙の始点 $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{f}(0) = (0, 0, 0)$ とし，山折を指定する．このとき，式 (1) を計算すると，折り紙の準線関数として，

$$\boldsymbol{f}(s) = \left(\frac{\sin(\pi s)}{4}, \frac{-\sin(\pi s)}{4}, \frac{\sqrt{16 - \pi^2}}{4\pi} E\left(\pi s\,|m\right)\right)$$

が得られた．ここで，$m = \pi^2/(\pi^2 - 16)$，$E(\varphi|m)$ はは $m$ をパラメタとする第 2 種不完全楕円積分である．

これにより，$[-1/2, 1/2] \times [-5, 5]$ サイズの長方形に描かれた基本展開図と折り紙を図 4，9 に示す．

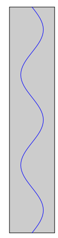

図 8　基本展開図

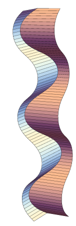

図 9　折り紙

基本展開図を $y$ 軸対称移動と平行移動で 4 つ並べた展開図と折り紙を図 10，11 に示す．

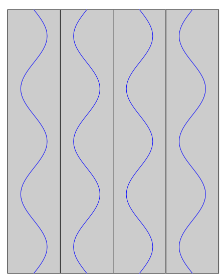

図 10　展開図

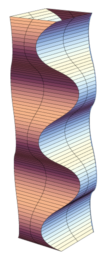

図 11　折り紙

## 5　おわりに

本研究では，展開図に滑らかな曲線で折線を描いたとき，3 次元空間に現れる折り紙柱面を計算する方法を考案した．この方法は展開図を折り上げた作品を，予めコンピュータのディスプレイ上で見ることを可能とする．そして，3D プリンタで正確な立体形状を得ることができる．

## 参考文献


[1] 尾関勝史:「折り紙により形成される曲面の研究」, 南山大学理工学部システム数理学科卒業論文

[2] 梅原雅顕. 山田光太郎:「曲線と曲面」, 裳華房,2015