# 教科書の行間埋めによる授業構想
## ～高等学校数学「2 次関数」を中心として～

2016SS096 芳野 美奈
指導教員:佐々木 克巳

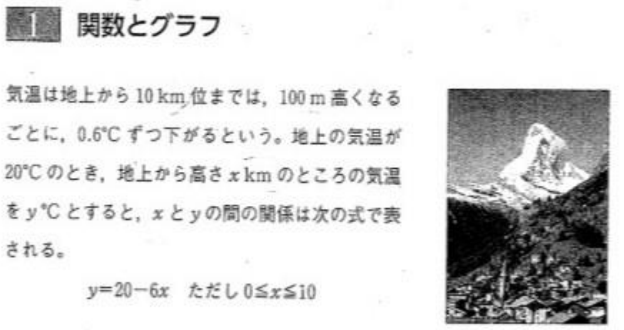
## 1 はじめに

本研究の目的は, 高等学校の教科書[1]の行間を埋めることにより授業構想に必要な情報を整理することである. この行間埋めは, 3つの視点, すなわち, 学習指導要領[3]における目標, 既習の内容, どのように問題を解けばいいかという見通しを踏まえて行う. このうちの既習の内容の確認は, 中学校の教科書([2])から適宜引用した上で既習の内容とその関係を明確にする. 行間埋めに必要なその他の情報は[3]などから抽出する. 対象とする単元は「2次関数」で, 具体的には, [1]の P. 68 から P. 97 の行間埋めを行った. 本稿ではそのうちの 5 つの例を示す.

## 2 行間埋めの例

この節では, [1]の「2次関数」に対する行間埋めの例を 5 つ示す. 各例は, [1]の引用部, [3]における目標, 既習の内容, どのように問題を解けばいいかという見通しで構成する.

例 2.1
引用部:図 2.1 に示す.


1 関数とグラフ

気温は地上から 10 km 位までは，100 m 高くなるごとに，0.6°C ずつ下がるという。地上の気温が 20°C のとき，地上から高さ $x$ km のところの気温を $y$°C とすると，$x$ と $y$ の間の関係は次の式で表される。

$y=20-6x$ ただし $0\leqq x\leqq 10$

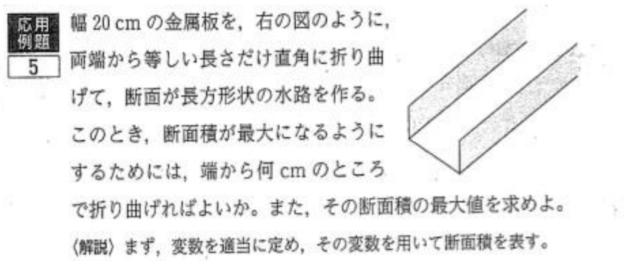
図 2.1:[1]の P. 68 の前半

目標:具体的な事象から数量の関係を見出し, その関係を式で表現できる.
既習の内容:1次関数 y=ax+b は x に比例する部分 ax と定数の部分 b の和の形になっている.
見通し1:具体的な事象から関係式への組み立て方を順序立てて説明する. 具体的には, 次の2つの手順(1)と(2)を説明する.
(1)与えられた条件を満たすよう式をつくる
(2)具体的な値の式を複数つくり, それを一般化する
(1)の手順
Step 1. 単位が複数あるとき, 1 つの単位に統一する(この問では変数 x が既に km で表されているので全ての単位を km に統一する).
Step 2. 地上(高さ 0km)の気温 20℃で, この 20℃からの気温差が x/0.1 に比例する. このことから式を求める.
(2)の手順
Step 1. (1)の手順 step 1 と同じ.
Step 2. 具体的な高さに対して式をつくる.

x が 1km のとき y=20-0.6×(1/0.1)
x が 2km のとき y=20-0.6×(2/0.1)
x が 3km のとき y=20-0.6×(3/0.1)

など・・・.
Step 3. Step 2 の式を一般化する. 下線部に注目すると, 式の下線部を x におきかえればよいとわかる.
見通し2:具体的な数量の関係を式で表すことのよさを2つ述べる. このよさをを確認することで, 式で表すことの意味も含めたこの問題の目的を見通すことができる.
(1)数量の関係が分かりやすくなる. この問題では, 高さと気温の関係が分かりやすくなっている.
(2)対象とする 2 つの数量のうち, 1 つの値を与えたときのもう 1 つの値を容易に求めることができる. 具体的には地上から 8kmの気温を, 式の x に 8 を代入することで求めることができる.

例 2.2
引用部:図 2.2 に示す.


応用例題 5 幅 20 cm の金属板を，右の図のように，両端から等しい長さだけ直角に折り曲げて，断面が長方形状の水路を作る。このとき，断面積が最大になるようにするためには，端から何 cm のところで折り曲げればよいか。また，その断面積の最大値を求めよ。

〈解説〉まず，変数を適当に定め，その変数を用いて断面積を表す。

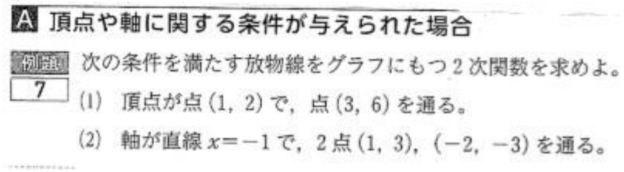
図 2.2:[1]の P. 91 の応用例題 5

目標:2 次関数を具体的な事象の考察に活用できる.
既習の内容:2次関数の最大値・最小値の求め方.
見通し1:2次関数の最大値を求める方法を知っているので, 求めたい最大値をとる量を y として, y が x の2次式で表現できそうな変量 x をとる. この問題では断面積を y, 深さを x とおく.
見通し2: 最後にまとめて書こうとすると忘れる可能性が出てくるため変数を定めると必ず x の範囲をすぐ書くようにする. 今回の問題では「$x>0$ かつ $20-2x>0$ より $0<x<10$」とかく.
見通し3:最大という言葉から変化を意識することができる

ので, 関数を使うことがわかる.

例 2.3

引用部:図 2.3 に示す.



**A** 頂点や軸に関する条件が与えられた場合

例題 7 次の条件を満たす放物線をグラフにもつ 2 次関数を求めよ。

(1) 頂点が点 (1, 2) で, 点 (3, 6) を通る。

(2) 軸が直線 $x=-1$ で, 2 点 (1, 3), (−2, −3) を通る。

図 2.3:[1]の P. 94 の例題 7

目標:条件に適した2次式の一般形を用いることができる.

既習の内容:2 次式の一般形には, $y=ax^2+bx+c$ と平方完成した $y=a(x-p)^2+q$ の 2 つがある.

見通し 1:頂点や軸ということばが与えられていることから, それらに合うように, 既習の内容で確認した2次式の一般形を用いる. 具体的には, 次のとおりである.

例 7(1) 頂点が(1,2)であることから $y=a(x-1)^2+2$ とおける.

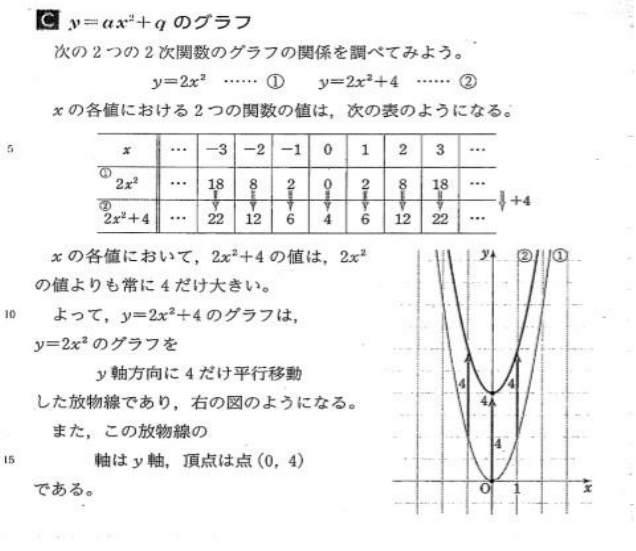
例 7(2) 軸が $x=-1$ であることから $y=a(x+1)^2+q$ とおける.

見通し 2:2 つの 2 次式の一般形にそれぞれ座標を代入し, 解を導きやすい方を用いるという方法もある.

見通し 3:頂点が分かる場合はグラフ上の頂点以外の 1 点が分かればグラフを 1 つに決めることができるが, 軸と 1 点の場合はグラフが 1 つに決まることはない. そのため, 2 点が与えられている.

例 2.4

引用部:図 2.4 に示す.



**C** $y=ax^2+q$ のグラフ

次の 2 つの 2 次関数のグラフの関係を調べてみよう。

$y=2x^2$ …… ① $y=2x^2+4$ …… ②

$x$ の各値における 2 つの関数の値は, 次の表のようになる。

| $x$ | … | −3 | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 | 3 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ① $2x^2$ | … | 18 | 8 | 2 | 0 | 2 | 8 | 18 | … |
| ② $2x^2+4$ | … | 22 | 12 | 6 | 4 | 6 | 12 | 22 | … |

+4

$x$ の各値において, $2x^2+4$ の値は, $2x^2$ の値よりも常に 4 だけ大きい。

よって, $y=2x^2+4$ のグラフは, $y=2x^2$ のグラフを $y$ 軸方向に 4 だけ平行移動した放物線であり, 右の図のようになる。

また, この放物線の軸は $y$ 軸, 頂点は点 (0, 4) である。



図 2.4:[1]の P. 76 の C

目標:$y=ax^2+q$ は, $y=ax^2$のグラフを y 軸方向に p だけ平行移動させたグラフであるとわかる.

既習の内容:1次関数のグラフの平行移動を考える. 例えば, $y=2x+3$ のグラフは $y=2x$ のグラフを y 軸方向に 3 だけ平行移動させたグラフである.

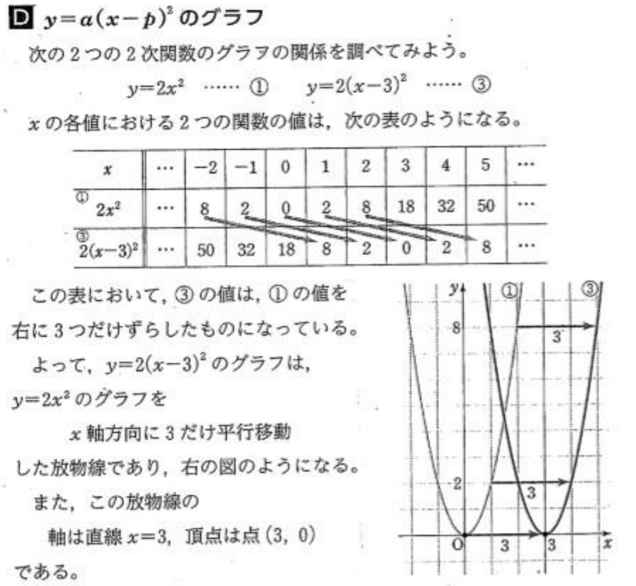
見通し1:既習の内容から $y=2x^2+4$ のグラフ(ア)は $y=2x^2$ のグラフ(イ)を y 軸方向に 4 だけ平行移動させた形になりそうだという見通しが立てられる.

見通し2:図 2.4 の表やグラフにおける各 x の値と対応する y の値に注目することで(ア)と(イ)のグラフの位置関係がわかる.

見通し3:y 軸方向に q だけ平行移動させたグラフの式は, もとのグラフの式の右辺に q を足している形になっている.

例 2.5

引用部:図 2.5 に示す.



**D** $y=a(x-p)^2$ のグラフ

次の 2 つの 2 次関数のグラヲの関係を調べてみよう。

$y=2x^2$ …… ① $y=2(x-3)^2$ …… ③

$x$ の各値における 2 つの関数の値は, 次の表のようになる。

| $x$ | … | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ① $2x^2$ | … | 8 | 2 | 0 | 2 | 8 | 18 | 32 | 50 | … |
| ③ $2(x-3)^2$ | … | 50 | 32 | 18 | 8 | 2 | 0 | 2 | 8 | … |

この表において, ③ の値は, ① の値を右に 3 つだけずらしたものになっている。

よって, $y=2(x-3)^2$ のグラフは, $y=2x^2$ のグラフを $x$ 軸方向に 3 だけ平行移動した放物線であり, 右の図のようになる。

また, この放物線の軸は直線 $x=3$, 頂点は点 (3, 0) である。



図 2.5:[1]の P. 77 の D

目標:y＝a(x-p)$^2$のグラフは y＝ax$^2$のグラフを x 軸方向に p だけ平行移動させたグラフであるとわかる.

既習の内容1:1次関数の平行移動を考える. 例えば, $y=2x-6$ は $y=2x-6=2(x-3)$と表すことができて, $y=2x-6$ のグラフは $y=2x$ のグラフを x 軸方向に 3 だけ平行移動させたグラフである.

既習の内容2:例 2.4 の見通し3.

見通し1:既習の内容 1 から, $y=2(x-3)^2$ は $y=2x^2$ を x 軸正方向に 3 だけ平行移動させた形になりそうだという見通しが立てられる.

見通し2:既習の内容 2 から, x 軸方向に p だけ平行移動させたグラフの式は, もとのグラフの式を x=…の形にして, その右辺に p を足している形になりそうだという見通しが立てられる. 具体的に $y=2x^2$に対して, この式変形をすると以下のように図 2.5 と同じ結果を得る.

$$x=\pm\sqrt{y/2} \Rightarrow \pm\sqrt{y/2}+3=x \Rightarrow \pm\sqrt{y/2}=x-3$$
$$\Rightarrow y/2=(x-3)^2 \Rightarrow y=2(x-3)^2$$

## 参考文献


[1]大島利雄 他 13 名, 数学 I , 数研出版, 東京, 2015

[2]岡本和夫 他 46 名, 未来へひろがる 数学 1~3, 啓林館, 大阪, 2015

[3]文部科学省, 高等校学習指導要領解説 数学編 理数編, 実教出版, 東京, 2009