正規様相論理とクリプキ・フレーム

2016SS095 安田匡慶

指導教員：佐々木克巳

1　はじめに

小野[1]の第 4 章では，様相論理，つまり，古典論理に時間，場合，状況等の因子を加味して考慮したときの論理を扱っている．このような論理に興味を持ち，研究対象とすることにした．

本研究では，様相論理の中でも正規な様相論理に内容を絞り，それらの関係やクリプキモデルによる意味づけの理解を深める．その理解は[1]で紹介されている例や定理の説明を補ったり，問に解を与えることで行う．

具体的な内容は，最小の正規様相論理の体系 K と，そのクリプキ・フレームによる健全性，および，代表的な正規様相論理の公理型とクリプキ・フレームにおける到達可能関係との関係である．本稿では，このうちの，公理型と到達可能関係との関係を以下の 4 節に示す．そのために 2 節で正規様相論理の体系 K と代表的な公理型を導入し，3 節でクリプキ・フレームを導入する．

2　様相論理の体系 K と代表的な公理型

この節では小野[1]に従って，正規様相論理の体系 K と代表的な公理型を導入する．

様相論理の論理式は，基本命題を表す命題変数と論理記号∧(かつ)，∨(または)，⊃(ならば)，￢(～でない)，□(必然的に～である)から次のように定義する．古典命題論理との違いは，記号□を用いることである．

定義 2.1

1) それぞれの命題変数は論理式である．
2) A, B がともに論理式ならば，(A∧B), (A∨B), (A⊃B), (￢A), (□A) はいずれも論理式である．

以後◇A を￢□￢A の省略形として用いる．◇A の意味は「A である可能性がある」である．

カッコをすべてつけるのは煩わしいので，今後は

1) 一番外側のカッコは省略してよい，
2) 記号￢，□，◇はほかの記号よりも結合が強いものと考え，(￢A), (□A), (◇A)のカッコを省略してよい，

という約束でカッコを取り除いてよいものとする．

[1]では，上の論理式の証明可能性をシークエントを用いて定義している．

論理式 $P_1, \cdots, P_m, Q_1, \cdots, Q_n$ に対して表現

$$P_1, \cdots, P_m \rightarrow Q_1, \cdots, Q_n$$

をシークエントという．古典命題論理の体系 LK では，LK の公理と LK の推論規則からシークエントの証明可能性を定義している．LK の公理は A→A で，LK の推論規則の例は，

$$\frac{A, \Gamma \rightarrow \Delta}{A \wedge B, \Gamma \rightarrow \Delta}\ (\wedge 左1) \qquad \frac{A, \Gamma \rightarrow \Delta \quad B, \Gamma \rightarrow \Delta}{A \vee B, \Gamma \rightarrow \Delta}\ (\vee 左)$$

$$\frac{A, \Gamma \rightarrow \Delta, B}{\Gamma \rightarrow \Delta, A \supset B}\ (\supset 右) \qquad \frac{\Gamma \rightarrow \Delta, A \quad A, \Pi \rightarrow \Sigma}{\Gamma, \Pi \rightarrow \Delta, \Sigma}\ (cut)$$

などである．ここで Γ などのギリシャ文字の大文字は論理式の有限列である．推論規則の上のシークエントを上式，下のシークエントを下式という．LK の推論規則の意味は「上式から下式が導かれる」である．詳細は[1]で確認できるが大まかには，LK の公理から LK の推論規則を適用してできる図を証明図といい，その一番下のシークエントを LK で証明可能であるという．また，シークエント→A が LK で証明可能のとき論理式 A は LK で証明可能であるという．

[1]における様相論理の体系の証明可能性は，LK の公理と LK の推論規則にさらに□に関する公理と推論規則を加えることで定義されている．体系 K は体系 LK に，さらに□に関するつぎの推論規則をつけ加えたものである．ただし，Γ が $B_1, \cdots, B_m$ のとき□Γ は $\Box B_1, \cdots, \Box B_m$ を表わすものとする．

$$\frac{\Gamma \rightarrow A}{\Box\Gamma \rightarrow \Box A}(\Box)$$

正規様相論理は，推論規則(□)を含む様相論理のことである．[1]で紹介されている，正規様相論理の代表的な公理型を以下に挙げる．

D：□A⊃◇A
T：□A⊃A
4：□A⊃□□A
B：A⊃□◇A
5：◇A⊃□◇A

K に公理として→□A⊃◇A などを追加しても，正規様相論理が定義される．

3　クリプキ・フレーム

この節では，[1]にしたがってクリプキ・フレームを導入する．

定義 3.1(クリプキ・フレーム)．空でない集合 M と M 上の二項関係 R の対(M,R)をクリプキ・フレームという．R をこのクリプキ・フレームの到達可能関係という．

定義 3.2(クリプキ・モデル)．(M,R)をフレームとする．また V を各命題変数 p に対し V(p)⊆M となるような写像とする．このとき，V をフレーム(M,R)上の付値という．そして，この 3 つの組(M,R,V)をクリプキ・モデルという．与えられたクリプキ・モデル(M,R,V)に対し，M の要素 a と論理式の間の二項関係⊨をつぎのように帰納的に定義する．

1) a⊨p ⇔ a∈V(p) (p は命題変数)
2) a⊨A∧B ⇔ a⊨A かつ a⊨B

3) a⊨A∨B ⇔ a⊨A または a⊨B
4) a⊨A⊃B ⇔ a⊨A でないか，または a⊨B
5) a⊨¬A ⇔ a⊨A でない
6) a⊨□A ⇔ aRb となるすべての b に対し b⊨A

a⊨A であるとき，「a で A は真である」という．「a⊨A でない」ことは a⊭A と表わす．5)と 6)より

7) a⊨◇A ⇔ aRb となるある b に対し b⊨A

がなりたつ．関係⊨は付値Ｖから一意的に定まるので，今後は V と⊨を同一視して，⊨のことを付値といったり，(M,R, ⊨)のことをクリプキ・モデルといったりする．定義 4.2 の 1)よりこのようないい方をしても混乱は生じない．

ここで，次の同値性を確認しておく．

8) a⊨A⊃B ⇔ a⊨A ならば a⊨B
9) a⊭□A ⇔ aRb となるある b に対し b⊭A

定義 3.3（恒真な論理式）．A を論理式とする．フレーム（M, R）上の任意の付値⊨と M の任意の要素 a に対して a⊨A となるとき，A は（M, R）で恒真であるという．クリプキ・モデル（M,R, ⊨）において，ある b（∈M）に対し b⊭A となるとき，（M,R, ⊨）で A は偽であるという．またある付値⊨に対し，A が（M,R, ⊨）で偽であるとき，A はフレーム（M, R）で偽であるという．

4 公理型と到達可能関係

この節では，2 節で導入した公理型と 3 節で導入したクリプキ・フレームの到達可能関係との関係，つまり次の定理の理解を深める．

定理 4.1. 任意のフレーム（M, R）に対し，つぎのことがなりたつ．

(1) T が（M, R）で恒真 ⇔ R は反射的
(2) 4 が（M, R）で恒真 ⇔ R は推移的
(3) D が（M, R）で恒真 ⇔ R が継続的
(4) B が（M, R）で恒真 ⇔ R が対称的
(5) 5 が（M, R）で恒真 ⇔ R がユークリッド的

ただし，二項関係 R の定義は，つぎのとおりである．

(1) R が反射的⇔どのxに対しても xRx がなりたつ
(2) R が推移的⇔xRy かつ yRz ならば xRz
(3) R が継続的⇔どのxに対してもあるyが存在して xRy
(4) R が対称的⇔xRy ならば yRx
(5) R がユークリッド的⇔xRy かつ xRz ならば yRz

本研究では，上の定理の証明をシークエントの考え方を用いて補った． 2 節で，論理式の証明可能性をシークエントを基本単位とした証明図により定義したが，ふつうの性質に対しても同様の図式で証明を与えることができる．まず，n+1 個の述語 $P_1,\cdots,P_n,Q$ に対して，

$$P_1,\cdots,P_n \Rightarrow Q$$

もシークエントとよぶことにする．このシークエントを基本単位として，我々が証明なしに正しいと認めるシークエントを LK の公理の代わりとして，また，我々が証明なしに導かれると認めるシークエントの変化を LK の推論規則の代わりとした図式を定義でき，この図式も証明図ということにする．この証明図の 1 番下にあるシークエントが $P_1,\cdots,P_n \Rightarrow Q$ のとき，その証明図が $P_1,\cdots,P_n$ から Q を導く証明を表すことになる．2 節の証明図との区別は，シークエントに「→」を用いているか，「⇒」を用いているかなどで判断できる．この証明図では「P でない」ことを「～P」と表現し，「aRb でない」ことを a$\overline{\text{R}}$b とも表現する．M の要素を対象として，∀(すべて)と∃(～存在する)も用いる．

本稿では，上の証明図を用いて，定理 4.1 の(3)と(4)の証明を与える．

(3) D が（M, R）で恒真 ⇔ R が継続的

(=>)

aRb⇒aRb　　　aRb⇒aRb
aRb⇒∃y(aRy)　　　aRb,b⊨A⇒∃y(aRy)
～∃y(aRy), aRb⇒b⊨p　　　a⊨◇A⇒∃y(aRy)
～∃y(aRy) ⇒a⊨ □p　　　～∃y(aRy), a⊨◇p⇒矛盾
～∃y(aRy), a⊨□p ならば a⊨◇p⇒矛盾
a⊨□p ならば a⊨◇p⇒∃y(aRy)
∀⊨∀a(a⊨□p⊃◇p) ⇒∃y(aRy)
∀⊨∀a(a⊨□p⊃◇p) ⇒∀x∃y(xRy)

(<=)

aRb⇒aRb　　　b⊨p⇒b⊨p
aRb⇒aRb　　　aRb,∀b(aRb ならば b⊨p)⇒b⊨p
aRb,∀b(aRb ならば b⊨p)⇒∃b(aRb かつ b⊨p)
∀x∃y(xRy),a⊨□p⇒a⊨◇p
∀x∃y(xRy)⇒∀⊨∀a(a⊨□p⊃◇p)

(4) B が（M, R）で恒真 ⇔ R が対称的

(=>)

∀x(x⊨p↔b$\overline{\text{R}}$x),bRc,c⊨p⇒矛盾
aRb⇒aRb　∀x(x⊨p↔b$\overline{\text{R}}$x),b⊨◇p⇒矛盾
b$\overline{\text{R}}$a,∀x(x⊨p↔b$\overline{\text{R}}$x)⇒a⊨p　b$\overline{\text{R}}$a,∀x(x⊨p↔b$\overline{\text{R}}$x),a⊨□◇p,aRb⇒矛盾
b$\overline{\text{R}}$a, ∀x(x⊨p↔b$\overline{\text{R}}$x), a⊨p ならば a⊨□◇p,aRb⇒矛盾
∀x(x⊨p↔b$\overline{\text{R}}$x),a⊨p ならば a⊨□◇p,aRb ⇒bRa・・・※
∀⊨∀a(a⊨p⊃□◇p),aRb ⇒bRa
∀⊨∀a(a⊨p⊃□◇p)⇒∀x∀y(xRy ならば yRx)

ここで，※の付値⊨は∀x(x⊨p↔aRx)をみたすように与えられている．

(<=)

aRb⇒aRb　　bRa⇒bRa
aRb ならば bRa, aRb ⇒bRa　　a⊨p⇒a⊨p
aRb ならば bRa, a⊨p,aRb ⇒bRa かつ a⊨p
∀x∀y(xRy ならば yRx), a⊨p,aRb⇒b⊨◇p
∀x∀y(xRy ならば yRx), a⊨p ⇒a⊨□◇p
∀x∀y(xRy ならば yRx) ⇒∀⊨∀a(a⊨p⊃□◇p)

参考文献

[1] 小野寛晰，『情報科学における論理』，日本評論社，東京，1994