教科書の行間埋めによる授業構想

～高等学校数学「確率」を中心として～

2016SS084 田中　広大
指導教員: 佐々木　克巳

1　はじめに

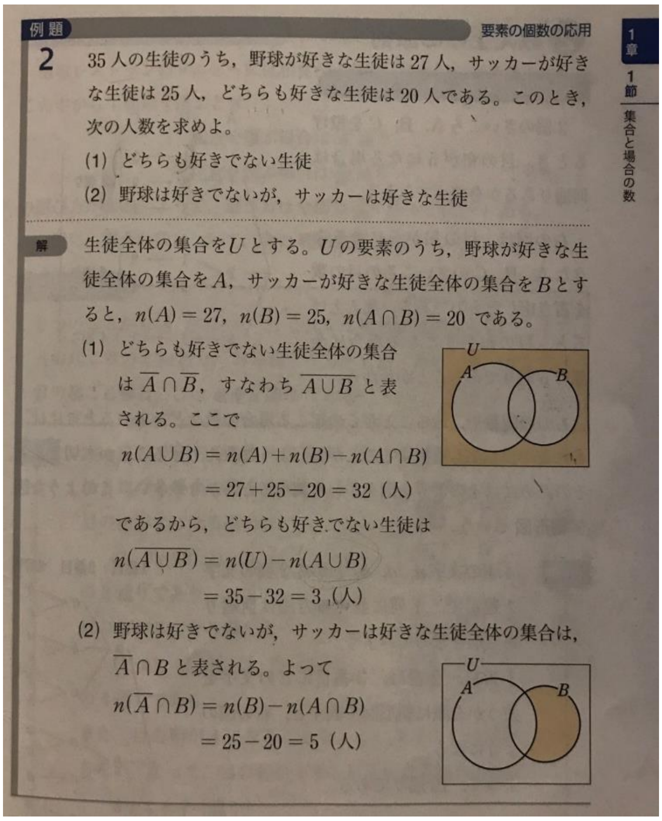
本研究の目的は，教科書の行間埋めを行うことにより授業構想に必要な情報を整理し，よりよい授業作りにつなげていくことである．この行間埋めは，東京書籍の教科書[1]をもとに，目標，予想される生徒の解答，既習の内容との関係，学習指導要領[2]との関係などをふまえて行う．対象とする単元は，高等学校数学の「場合の数と確率」とし．特に「集合と場合の数」，「確率とその基本性質」，「いろいろな確率」を扱った．本稿では，その行間埋めの例を 2 つ示す．

2　行間埋めの例

この節では，行間埋めの例を 2 つ示す．各例は引用部，目標，想定される解答，既習の内容との関係，[2]との関係で構成する．

例 2.1（[1]第 1 章　第 1.1 節　p.13）

(1) 引用部：図 2.1 に示す．



例題　要素の個数の応用

1章　1節　集合と場合の数

2　35 人の生徒のうち，野球が好きな生徒は 27 人，サッカーが好きな生徒は 25 人，どちらも好きな生徒は 20 人である。このとき，次の人数を求めよ。

(1) どちらも好きでない生徒

(2) 野球は好きでないが，サッカーは好きな生徒

解　生徒全体の集合を U とする。U の要素のうち，野球が好きな生徒全体の集合を A，サッカーが好きな生徒全体の集合を B とすると，$n(A)=27$，$n(B)=25$，$n(A\cap B)=20$ である。

(1) どちらも好きでない生徒全体の集合は $\overline{A}\cap\overline{B}$，すなわち $\overline{A\cup B}$ と表される。ここで

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$
$$=27+25-20=32\ (人)$$

であるから，どちらも好きでない生徒は

$$n(\overline{A\cup B})=n(U)-n(A\cup B)$$
$$=35-32=3\ (人)$$

(2) 野球は好きでないが，サッカーは好きな生徒全体の集合は，$\overline{A}\cap B$ と表される。よって

$$n(\overline{A}\cap B)=n(B)-n(A\cap B)$$
$$=25-20=5\ (人)$$

図 2.1：要素の個数の応用

(2) 目標：問題文に現れる量を数学的にとらえ，集合の要素の個数の性質を用いて，解くことができる．

(3) 想定される解答：問(1)では問題文を正しく理解できず，誤った場合の数を求める解法が，問(2)では問(1)の解答を利用した解法が想定できる．具体的には，次の解答例が考えられる(図 2.1 の解の最初の 3 行は前提とする)．

問(1)の解答例（誤答）．「どちらも好きでない」生徒の集合は $\overline{A\cap B}$ だから，補集合の要素の性質より求める人数は $\mathrm{n}(\overline{A\cap B})$ = n(U) - $\mathrm{n}(A\cap B)$ =35-20=15（人）である．

問(2)の解答例．野球が好きでない生徒の人数は，$\mathrm{n}(\bar{A})$ であり，その中でもサッカーが好きな生徒の人数は，$\mathrm{n}(\bar{A})$ から「どちらも好きでない生徒」を引けばよいので，$\mathrm{n}(\bar{A})-\mathrm{n}(\bar{A}\cap\bar{B})=\mathrm{n}(\bar{A})$-$\mathrm{n}(\overline{A\cup B})$=8-3=5（人）である．

問(1)の解答例では，問題文の「どちらも好きでない生徒」を誤って解釈しているため，「どちらも（好きでない）生徒」のようにかっこをつけて，生徒の誤った解釈を防ぐことも必要と考える．

問(2)の解答例では，教科書の解き方を比べることにより，解法の多様性を伝えられる．教科書の解き方では，図 2.1 のベン図を意識しているのに対し，上の問(2)の解答例では問(1)の結果を使うことを意識している．しかし，なぜ答えが同じになるかを理解できない生徒がいる場合は，図 2.2 を用いて説明することで，求めようとしている集合が同じであることを理解させる．

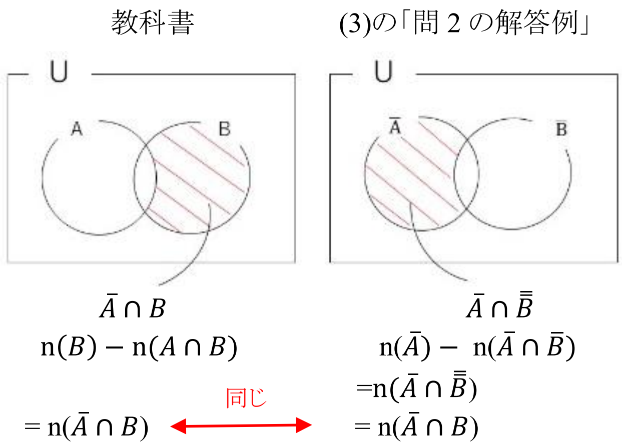


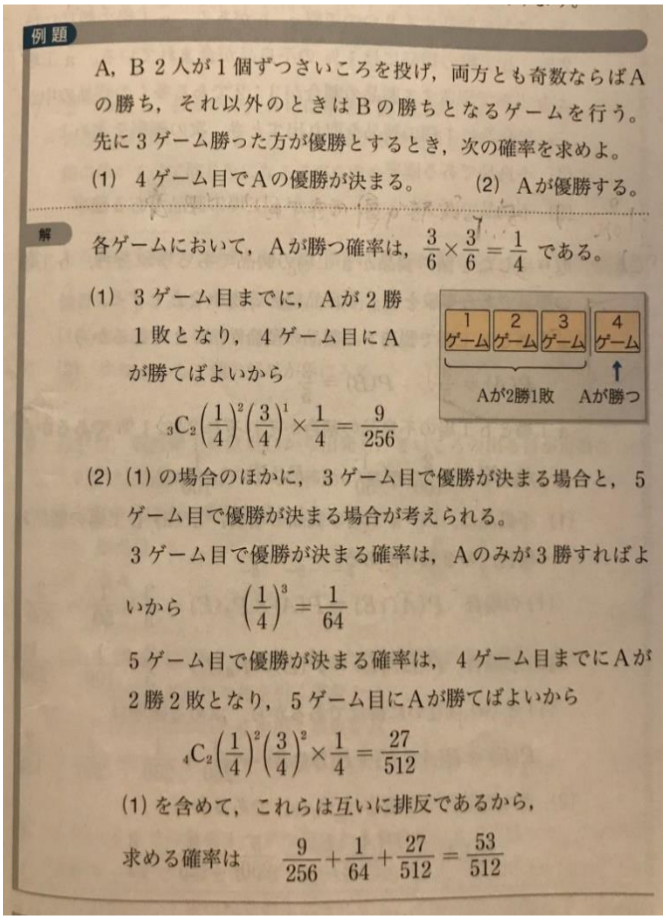
図 2.2：問(2)の考察

(4) 既習の内容との関係:生徒は既習の内容として，和集合・補集合などの要素の個数を公式を用いて求めること，また，集合のド・モルガン律を学んでいる．教科書の問(1)の解答では，これらが用いられている．(2)で示した問(1)の誤答，問(2)の教科書の解答と(2)の解答例では，補集合の要素の個数の公式の考え方が用いられている．

(5) 学習指導要領との関係:[2]には，「場合の数を数え上げるには，あるものに着目して分類・整理すること，特に樹形図や表に整理すること，より分かりやすいものと1対1に対応付けること，規則に基づき数の列をつくるなどが有用であることを理解させる。」と書かれており，この問題では，いくつかの場面でベン図が有効と考える．例えば，教科書の解法では，問(1)，問(2)ともにベン図が理解を助けている．図 2.2 でもベン図が理解の助けになっている．

例 2.2（[1]第 1 章 第 3.3 節 p.55）

(1) 引用部:図 2.3 に示す．



例題

A，B 2人が1個ずつさいころを投げ，両方とも奇数ならばAの勝ち，それ以外のときはBの勝ちとなるゲームを行う。先に3ゲーム勝った方が優勝とするとき，次の確率を求めよ。

(1) 4ゲーム目でAの優勝が決まる。　(2) Aが優勝する。

解

各ゲームにおいて，Aが勝つ確率は，$\frac{3}{6}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{4}$ である。

(1) 3ゲーム目までに，Aが2勝1敗となり，4ゲーム目にAが勝てばよいから

$${}_3C_2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^1\times\frac{1}{4}=\frac{9}{256}$$

(2) (1) の場合のほかに，3ゲーム目で優勝が決まる場合と，5ゲーム目で優勝が決まる場合が考えられる。

3ゲーム目で優勝が決まる確率は，Aのみが3勝すればよいから $\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{1}{64}$

5ゲーム目で優勝が決まる確率は，4ゲーム目までにAが2勝2敗となり，5ゲーム目にAが勝てばよいから

$${}_4C_2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^2\times\frac{1}{4}=\frac{27}{512}$$

(1) を含めて，これらは互いに排反であるから，

求める確率は $\frac{9}{256}+\frac{1}{64}+\frac{27}{512}=\frac{53}{512}$

図 2.3:反復試行の確率の応用

(2) 目標:反復試行の確率の公式を利用して，応用問題の確率を導くことができる．

(3) 想定される解答:反復試行の確率の公式を利用せず，樹形図から解く解法が想定できる．具体的には，次の解答例が考えられる．

解答例．問(1) 各ゲームにおいて，A が勝つ確率は $\frac{3}{6}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{4}$ で，B が勝つ確率は $1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ である．4 ゲーム目で A の優勝が決まるのは，○が A の勝ち，×が B の勝ちとすると，図 2.4 の(*1)，(*2)，(*3)の 3 通りである．

```
        ○ ─ × ─ ○・・・(*1)
    ○ <
        × ─ ○ ─ ○・・・(*2)
  <
    × ─ ○ ─ ○ ─ ○・・・(*3)
```

図 2.4:解答例(1)の樹形図

それぞれの確率は(*1)が$\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{256}$ で，同様に求めると，(*2)と(*3)はどちらも$\frac{3}{256}$ である．(*1)，(*2)，(*3)はそれぞれ排反なので，求める確率は $\frac{3}{256}+\frac{3}{256}+\frac{3}{256}=\frac{9}{256}$ である．

(4) 既習の内容との関係:生徒は反復試行の確率の公式を学んでいる．

この問題では，反復試行の確率の公式を用いる解法（教科書の解法）と樹形図を用いる解法（(2)の解法）の比較により、双方のよさを確認できる．前者では，正確かつ計算量が少なく解けるが，公式にあてはめるだけでは直観的な意味が理解できない．一方，後者では，考えられる場合を見落とす可能性があるが，直観的な意味は理解しやすい．さらに後者のよさは問題文を「7 ゲーム勝った方を優勝とする」と変えると，顕著に表れるため，そのよさを強調したいときは，この変えた問題が有効である．

また，問(2)では問題文の「先に 3 ゲーム勝った方を優勝とする」から試行は 5 ゲームまでしかないため，考えるのは 3 ゲーム目に優勝・4 ゲーム目に優勝・5 ゲーム目に優勝の 3 つの場合であり，ここから反復試行の反復する回数が定まることも強調する．

参考文献

[1] 俣野博，河野俊丈 他 31 名:『数学 A』，東京書籍，東京，2016

[2] 文部科学省:『高等学校学習指導要領（平成 30 年告示）解説数学編理数編』，実教出版，東京，2019