

スマリヤンの究極の論理パズルの解法

2016SS064 瀬口 可奈

指導教員: 佐々木克巳

にしたがって述べる.

1 はじめに

本研究の目的は, [3]の論理パズルを, タブローによる解法と, 真理値表による解法で解き, 両者を比較することである. 本研究の動機は, 本研究室の授業において論理パズルをとり扱った際に, 上の2つの解法が紹介され, その解法において, どのパターンでどこが矛盾するのか, 矛盾しないのかを表現できるなどの, 解を導く過程が一目で分かることに, 強く興味を持ったことである.

本研究では, [3]の問題の8題を2つの解法で解き, 両者を考察した. 本稿では, そのうちの2題について述べる. 以下の2節で, 本研究で扱う論理パズルの概要を示し, [1], [2]にしたがって, 2つの解法を示す. 3節で, 本稿で扱う2題について述べる.

また本稿では, 次の記号を用いる.

¬: ~でない, &: かつ, ∨: または, ≡: 同値, ⊥: 矛盾

2 論理パズルの概要

この節では, 本稿で扱う論理パズルの概要と, 2つの解法, すなわち, 真理値表を用いた解法と, タブローを用いた解法を示す.

まず, 本稿で扱う論理パズルの概要を示す. そのパズルは, 登場人物の発言から, 与えられた条件の成立・不成立を求めるパズルである. ただし, このパズルには次の前提条件がある.

条件 2.1.

- (1) 登場人物は, その状態(時刻, 場所, 心理状態)によって正直者か嘘つきかのどちらかに決まる.
- (2) 登場人物は, 正直者である間は常に本当のことを言う.
- (3) 登場人物は, 嘘つきである間は常に嘘をつく.

次に, 真理値表による解法を, [1]にしたがって述べる. その解法は条件 2.1 から導かれる次の性質 2.2 にもとづいている.

性質 2.2. 登場人物 X が, ある状態で P と述べたとき「 X がその状態で正直者」 $\equiv P$ が成り立つ.

上の性質から, 次のように解を求めることができる.

真理値表による解法: X が P と発言したとき, 同値性「 X が発言した状態で正直者」 $\equiv P$ と成立・不成立を求めたい条件の真理値表を書き, その同値性が真となる行から解を求める方法.

最後に, タブロー, および, タブローによる解法を, [2]

定義 2.3. 文の有限集合 S について, S のタブローを次のように定義する.

(1) S の文を縦に並べた図は S のタブローである.

(2) S のタブロー T とその1つの枝を θ とする.

(2.1) θ に属する文から文 P が導かれるとき, T の θ の下に P を書き加えてできる図は, S のタブローである.

(2.2) θ に文 $P \vee Q$ が属するとき, T の θ の下に P が現れるとき, T の θ の下に $P \wedge Q$ を書き加えてできる図は, S のタブローである.

性質 2.4. S は正しい文の集合, T は S のタブローとする. T に, \perp の現れない枝がちょうど1つだけあるとき, その枝に現れる文はすべて正しい.

上の性質から, 次のように解を求めることができる.

タブローによる解法: 問題文などから明らかに正しいとわかる文の集合に, 定義 2.3(2)の操作を, 次の2条件を満たすまで適用したタブロー T をつくり, (条件 2)の「解を導く文」から解を導く方法.

(条件 1) T に, \perp の現れない枝がちょうど1つだけある.

(条件 2) (条件 1)の枝に, 解を導く文が現れる.

以下では, タブローに現れる各文には番号を付け, 定義 2.3(2.1)で加えられた文 P の右に, その根拠となる θ の文の番号を「:…」の形で書き加える.

3 具体的問題

この節では, [3]の Chapter17「気まぐれな嘘つき」, Chapter21「いや違う!」の問題に対して真理値表とタブローによる解を与え, 両者を比較する. 真理値表では, 真を t , 偽を f で表す.

問題 3.1(要約). 2人の住人 X と Y についての問題である. その前提条件は, 次の4つである.

(*1) X は, 月曜は嘘つき, 他の曜日は正直者.

(*2) Y は, 木曜は嘘つき, 他の曜日は正直者.

(*3) ある日 X か Y のどちらか (Z とおく) が「明日は火曜日だ。」と発言した.

(*4) (*3)の発言からちょうど1週間後, Z が「俺は明日嘘をつく。」と発言した.

ここから「 Z は X か Y か?」と「発言したのは何曜日か?」を求める.

以下の2つの解で, 次の記号を用いる. ただし, (*3), (*4)の発言をした曜日を「当日」, その翌日を「翌日」とする.

t(Z): Zは当日正直者. 火*: 翌日は火曜日.
 □: 当日は□曜日. L*(Z): 翌日に Zは嘘つき.

真理値表による解: 性質 2.2 からわかる同値性は, 「t(Z) ≡ 火*」と「t(Z) ≡ L*(Z)」であり, この 2 つの真理値表は, 表 3.1 のようになる. ここで, *は任意の真理値を表す.

表 3.1: 問題 3.1 の真理値表

Z=X	月	水	木	日	t(Z)	≡	火*	t(Z)	≡	L*(Z)
t	t	f	f	f	f	f	t	f	t	f
t	f	f	t	f	t	f	f	t	f	f
t	f	*	f	f	t	f	f	t	f	f
t	f	f	f	t	t	f	f	t	t	t
f	t	f	f	f	t	t	t	t	f	f
f	f	f	t	f	f	t	f	f	t	f
f	f	t	f	*	t	f	f	t	t	t
f	f	f	f	f	t	f	f	t	f	f

表 3.1 より, 6 行目のみ 2 つの同値性が真となる. すなわち, Zは Yで, 発言した曜日は木曜日である.

タブローによる解: 文の集合 {(*1), (*2), (*3), (*4) } のタブローを図 3.1 に示す.

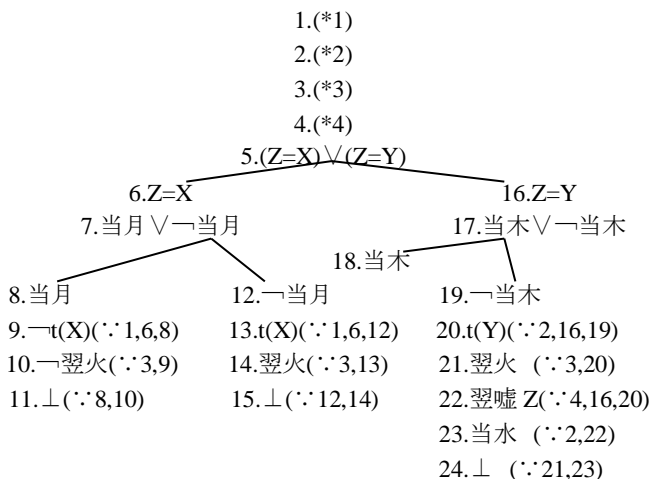


図 3.1: 問題 3.1 のタブロー

図 3.1 のタブローの 4 つの枝のうち, 左の 2 つの枝と 1 番右の枝に ⊥ が現れる. よって, 性質 2.4 よりそのタブローの左から 3 番目の枝に現れる文はすべて正しい. したがって, 図 3.1 の 16, 18 より Zは Yで発言した曜日は木曜日である.

問題 3.2(要約). 外見が全く同じ双子, X と Y についての問題である. 前提条件は, 以下の 3 つである.

(*1) X と Y には表 3.2 の 3 つの心理状態がある. 二人は常に心理状態が同じであり, 1, 2, 3, 1, 2, 3... と一定のパターンで変化する.

表 3.2: X と Y の心理状態

心理状態	1	2	3
X	嘘つき	正直者	正直者
Y	正直者	嘘つき	正直者

(*2) X か Y のどちらか(Z1 とおく)が「おれは X だ.」と発言した.

(*3) (*2)の発言者ではない方(Z2 とおく)が「おれは Y だ.」と発言した. ただし, (*2)と(*3)の発言間に心理状態の変化は起こっていない.

ここから, 「X は Z1 か Z2 かどちらか?」を求める.

以下の 2 つの解で, 次の記号を用いる.

t(Z1): Z1 は(*2)の発言時の心理状態で正直者である.

t(Z2): Z2 は(*3)の発言時の心理状態で正直者である.

真理値表による解: 性質 2.2 からわかる同値性は, t(Z1) ≡ (Z1=X) と t(Z2) ≡ (Z2=Y) であり, この 2 つの同値性の真理値表は表 3.3 のようになる.

表 3.3: 問題 3.3 の真理値表

Z1=X	Z2=Y	状態	t(Z1) ≡ (Z1=X)	t(Z2) ≡ (Z2=Y)
t	t	1	f	f
t	t	2	t	t
t	t	3	t	t
f	f	1	t	f
f	f	2	f	t
f	f	3	t	f

表 3.3 より, 3 行目で 2 つの同値性が真となる. すなわち, X は Z1 である.

タブローによる解: 文の集合 {(*1), (*2), (*3) } のタブローを図 3.2 に示す. この図から, 問題 3.1 の解と同様にして, X は Z1 とわかる.

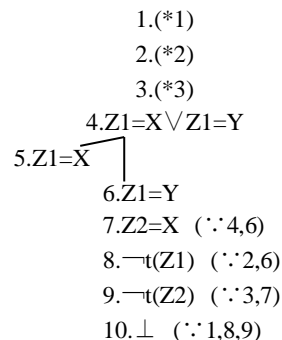


図 3.2: 問題 3.2 のタブロー

考察. 真理値表の大きな特徴は, 総当たりの方法であることであり, 求めたい条件だけでなく, 他の可能性がどの点において矛盾するのかわかることもできる. また, 問題 3.2 のように, 求めたい条件だけでなく同時に満たす条件まで確認をすることができる. これに対し, タブローを用いた方法では, 問題 3.1 や問題 3.2 のように, 真理値表で考察した場合の数を大幅に少なくすることが可能である. この少なくした部分は, 求めたい条件に則した補足部分の条件である.

参考文献

[1] 佐々木克巳:『2019 年度「理工学概論(真理値表と論理パズル)」講義資料』. 南山大学, 2019.
 [2] 佐々木克巳:『2019 年度ソフトウェア工学演習Ⅶ講義資料』. 南山大学, 2019.
 [3] レイモンド・スマリヤン:『究極の論理パズル』. 白揚社, 東京, 2008.