# 形式論理を用いた高等学校数学の解法

2016SS043 村上 智輝

指導教員：佐々木 克巳

## 1. はじめに

本研究の目的では，高等学校の数学の問題や大学入試で出題された問題を，形式論理の手法を用いた解法で考えることにより，考察することである．もともと大学の講義で数理論理学について学んでいたこともあり，この解法に興味や関心を持った．本研究の考察は，主に長岡[3]にしたがうが，それに加えて，数理論理学で学んだシークエントの手法を用いてその理解を深めた．

本研究で扱った問題は[3]のうちの Theme1~Theme10 で，本稿ではそのうちの 1 題をとりあげ 3 節に示す．2 節では，シークエントの手法について述べる．

## 2. シークエントの手法について

この節では，佐々木[1],[2]に従い，シークエントを導入し，その変化の過程を表す図式(証明図)で証明を表現できることを述べる．本研究で用いるシークエントの手法とは，この証明図で証明を表現する手法のことである．

### 2.1 シークエント

$n+1$ 個の述語 $P, P_1, \ldots, P_n$ に対し表現

$$P_1, \ldots, P_n \Rightarrow P$$

をシークエントという(n=0,1,2,⋯)．"$P_1, \ldots, P_n$"をこのシークエントの左辺，P を右辺という(n=0 のとき，左辺は空列を表す)．シークエントの左辺における各文の順番と重複は考えないものとする．シークエントの意味は，「左辺に現れる述語から右辺の述語が導かれる」である．証明の各段階においては，左辺が「使える性質の列」，右辺は「導きたい性質」となる． また述語を表すのに適宜，論理記号∧(かつ)，∨(または)，→(ならば) ，¬(～でない)，∀(すべて)，∃(存在)を用いる．

### 2.2 証明図

証明は推論を繰り返して構成される．故に，証明における各推論をシークエントの変化で表現できれば，証明はシークエントの変化の過程で表現できる．たとえば，述語 P から述語 Q を導く推論は，前節で示したシークエントの解釈から

$$\begin{array}{c} Q, R_1, \ldots, R_n \Rightarrow R \\ \downarrow \\ P, R_1, \ldots, R_n \Rightarrow R \end{array} \qquad \text{または} \qquad \begin{array}{c} R_1, \ldots, R_n \Rightarrow P \\ \downarrow \\ R_1, \ldots, R_n \Rightarrow Q \end{array}$$

のいずれかの変化で表現できる．以後，n 個のシークエント $S_1, \ldots, S_n$ からシークエント S への変化を

$$\frac{S_1 \ \ldots \ S_n}{S}$$

と表現し，これを推論規則という．各 $S_i$ をこの推論規則の上式，S を下式という．述語 P から述語 Q を導く推論は，推論規則

$$\frac{Q, R_1, \ldots, R_n \Rightarrow R}{P, R_1, \ldots, R_n \Rightarrow R} \qquad \text{または} \qquad \frac{R_1, \ldots, R_n \Rightarrow P}{R_1, \ldots, R_n \Rightarrow Q}$$

で表現することができる．

S を下式とする推論規則 I の上式が $S_1$ と $S_3$ のとき，I の上に $S_1$ を下式とする推論規則と $S_3$ を下式とする推論規則を，

$$\frac{\dfrac{S_2}{S_1} \qquad \dfrac{S_4}{S_3}}{S}$$

のように積み上げることができる．このような積み上げを，正しいと認められた推論規則を用いて行っていき，正しいと認められたシークエントに到達した図式を証明図という．本研究で正しいと認めた推論規則の例をあげる．

$$\frac{P, Q, \Gamma \Rightarrow R}{P \wedge Q, \Gamma \Rightarrow R}\ (\wedge 左) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow P \quad \Gamma \Rightarrow Q}{\Gamma \Rightarrow P \wedge Q}\ (\wedge 右)$$

$$\frac{P(z), \Gamma \Rightarrow Q}{\exists x P(x), \Gamma \Rightarrow Q}\ (\exists 左) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow P(t)}{\Gamma \Rightarrow \exists x P(x)}\ (\exists 右)$$

$$\frac{s=t, p(t) \Rightarrow Q}{s=t, p(s) \Rightarrow Q}\ (=) \qquad \frac{s=t, \Gamma \Rightarrow p(t)}{s=t, \Gamma \Rightarrow p(s)}\ (=)$$

ただし，Γ は述語の有限列，(∃左)における z は，その下式において自由に出現しない変数，(∃右),(=)における s,t は任意の項(対象を表す表現)である．また， (=)における，s=t は，s=t が正しいと認められているときは省略する．

## 3. 具体例

この節では，[3]の Theme7 の例題を考察する．

[例題] 連立方程式

$$x+y+z=a \qquad (1)$$

$$xy=z \qquad (2)$$

$$x^2+y^2=z^2 \qquad (3)$$

が実数解をもつ実数 a の値の範囲はどうなるか．

[解答 1] (高等学校で学んだ内容を用いた解法)

(1)より，

$$x+y=a-z \qquad (4)$$

だから，

$$\begin{aligned} z^2 &= (x^2+y^2) && \because (3) \\ &= (x+y)^2 - 2xy \\ &= (a-z)^2 - 2z && \because (2),(4) \\ &= a^2 - 2az + z^2 - 2z \end{aligned}$$

$$2z(a+1)=a^2 \qquad (5)$$

である.

ここで，$a=-1$ では，(5)は成立しないので，$a\neq -1$ とわかる. よって，$z=a^2/2(a+1)$ である.

一方，(4),(2)より，x,y は t についての 2 次方程式

$$t^2-(a-z)t+z=0$$

の解である. よって，この方程式が実数解をもつ a の範囲，つまり判別式

$$D=(a-z)^2-4z=z^2-2(a+2)z+a^2$$

が 0 以上となる a の範囲を求めればよい. $z=a^2/2(a+1)$ を代入して，整理すると,

$$(a^2/2(a+1))^2-2(a+2)(a^2/2(a+1))+a^2\geqq 0$$

$$a^2(a^2-4a-4)\geqq 0$$

となり，$a^2\geqq 0$ だから,

$$a=0 \text{ または } a^2-4a-4\geqq 0$$

すなわち,

$$a\leqq 2-2\sqrt{2} \text{ または } a=0 \text{ または } 2+2\sqrt{2}\leqq a$$

を得る. $a\neq -1$ だったので,

$$a<-1 \text{ または } -1<a\leqq 2-2\sqrt{2} \text{ または } a=0 \text{ または } 2+2\sqrt{2}\leqq a$$

である.

[解答 2] ([3])(形式論理を用いた解法)

$$
\begin{array}{lll}
 & \exists z\exists x\exists y(x+y+z=a\wedge xy=z\wedge x^2+y^2=z^2) & \\
\Leftrightarrow & \exists z\exists x\exists y(x+y=a-z\wedge xy=z\wedge x^2+y^2=z^2) & \\
\Leftrightarrow & \exists z((a-z)^2-4z\geqq 0\wedge (a-z)^2-2z=z^2) & (*1)\\
\Leftrightarrow & \exists z(z^2-2(a+2)z+a^2\geqq 0\wedge 2(a+1)z=a^2) & \\
\Leftrightarrow & \exists z(z^2-2(a+2)z+a^2\geqq 0\wedge a\neq -1 \wedge z=a^2/2(a+1)) & \\
\Leftrightarrow & a\neq -1 \wedge (a^2/2(a+1))^2-2(a+2)a^2/2(a+1)+a^2\geqq 0 & (*2)\\
\Leftrightarrow & a\neq -1\wedge a^2(a^2-4a-4)\geqq 0 & \\
\Leftrightarrow & a\neq -1\wedge (a=0\vee a^2-4a-4\geqq 0) & \\
\Leftrightarrow & a\neq -1\wedge (a=0\vee 2-2\sqrt{2}\geqq a\vee 2+2\sqrt{2}\leqq a) & \\
\Leftrightarrow & a=0\vee 2-2\sqrt{2}\geqq a>-1\vee a<-1\vee 2+2\sqrt{2}\leqq a &
\end{array}
$$

ここで，(*1)では，次の同値性が用いられている.

$$\exists x\exists y(x+y=u\wedge xy=v\wedge p(x+y,xy))\Leftrightarrow u^2-4v\geqq 0\wedge p(u,v)$$

この同値性の証明を証明図によって補う. (=>)の証明を図 1 に，(<=)の証明を図 2 に示す. 図 2 の(∃右)においては s,t は次のとおりである.

$$s=(u+\sqrt{u^2-4v})/2,\quad t=(u-\sqrt{u^2-4v})/2$$

(*2)では，次の同値性が用いられている.

$$\exists x(x=t\wedge p(x)) \Leftrightarrow p(t)$$

この同値性の証明を証明図によって補う. (=>)の証明を図 3 に，(<=)の証明を図 4 に示す.

$$\dfrac{\dfrac{x=t,p(x)\Rightarrow p(t)}{x=t\wedge p(x)\Rightarrow p(t)}\ (\wedge 左)}{\exists x(x=t\wedge p(x))\Rightarrow p(t)}\ (\exists 左)$$

図 3:(=>)の証明図

$$\dfrac{\dfrac{p(t)\Rightarrow t=t \qquad p(t)\Rightarrow p(t)}{p(t)\Rightarrow t=t\wedge p(t)}\ (\wedge 右)}{p(t)\Rightarrow \exists x(x=t\wedge p(x))}\ (\exists 右)$$

図 4:(<=)の証明図

考察.　高等学校で学んだ内容を用いた解法では，与えられた条件式を変形して，a の範囲を求めているが，その変形が同値変形であることは，はっきりとは記述されていない. 一方，形式論理を用いた解法では，同値変形で a の範囲を求めている. よって後者の方が，より説得力があると考える.

## 参考文献


[1] 佐々木克巳,『シークエントによる証明の構想と図式化』，教職センター紀要，南山大学教職センター，2017, pp.47-50.

[2] 佐々木克巳，2018 年度「数理論理学」講義資料，南山大学，2018.

[3] 長岡亮介,『総合的研究 論理学で学ぶ数学-思考ツールとしてのロジック-』，旺文社，東京，2017.


$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x+y=u,xy=v,p(x+y,xy)\Rightarrow (x-y)^2\geqq 0}{x+y=u,xy=v,\ p(x+y,xy)\Rightarrow (x+y)^2-4xy\geqq 0}\ (=)}{x+y=u,xy=v,p(x+y,xy)\Rightarrow u^2-4v\geqq 0}\ (=) \qquad \dfrac{x+y=u,xy=v,p(u,v)\Rightarrow p(u,v)}{x+y=u,xy=v,p(x+y,xy)\Rightarrow p(u,v)}\ (=)}{x+y=u,xy=v,p(x+y,xy)\Rightarrow u^2-4v\geqq 0\wedge p(u,v)}\ (\wedge 右)}{x+y=u\wedge xy=v\wedge p(x+y,xy)\Rightarrow u^2-4v\geqq 0\wedge p(u,v)}\ (\wedge 左)}{\exists x\exists y(x+y=u\wedge xy=v\wedge p(x+y,xy))\Rightarrow u^2-4v\geqq 0\wedge p(u,v)}\ (\exists 左)$$

図 1: (=>)の証明図

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{u^2-4v\geqq 0,p(u,v)\Rightarrow u=u\wedge v=v\wedge p(u,v)}{u^2-4v\geqq 0,p(u,v)\Rightarrow s+t=u\wedge st=v\wedge p(s+t,st)}\ (=)}{u^2-4v\geqq 0,p(u,v)\Rightarrow \exists x\exists y(x+y=u\wedge xy=v\wedge p(x+y,xy))}\ (\exists 右)}{u^2-4v\geqq 0\wedge p(u,v)\Rightarrow \exists x\exists y(x+y=u\wedge xy=v\wedge p(x+y,xy))}\ (\wedge 左)$$

図 2: (<=)の証明図