不等式の2つ解法の考察

2016SE095 安田恭介
指導教員:佐々木克巳

1 はじめに

本研究の目的は, 不等式の問題に対する次の 2 つの解法を比較し, 解法 2 のよさを確認することである.
解法 1. 不等式を方程式で置き換えた問題の解法と同様の解法.
解法 2.与えられた不等式を適切に f(x)>g(x)のように同値変形し, y=f(x)のグラフと y=g(x)のグラフをかいて, その位置関係から解を求める解法.

桑原[1]は, 不等式を解く問題において上の 2 つの解法を意識した不等式の問題を3つ取り上げている. 本研究は, まず, [1]の 3 つの問題に, 上の 2 つの解法による解を与え, 両者を比較した. そして, 解法 1 で場合分けが必要な問題では, 解法 2 のよさが顕著になると予想し, 解法 1 で場合分けが必要な別の問題を考察した. 具体的には, 絶対値を含む問題と, 定数 a を含む不等式の応用問題を考察した. この 2 種類と[1]の問題に対して, 解法 2 のよさをまとめた結果を表 1.1 に示す.

表 1.1:解法 2 のよさ

[1]の問題	絶対値を含む問題	応用問題
視覚的にわかりやすく, 結果の確認がしやすい		
解法 1 の, 場合分けの必要性に気づきやすい, また, 場合分けの必要性に気づかないことによる誤答の原因に気づける	絶対値を含む問題には対称性があるので, 見通しが立てやすくなる	解法 1 での解答の方針がわからないときに別解として役に立つ

以下の各節で, 表 1.1 の 3 種類の問題の詳細をそれぞれ示す.

2 [1]の問題

この節では, [1]の 3 つの問題の考察の概要を示す. [1]の 3 つの問題のうちの 2 題は, 解法 1 で場合分けが必要である. その 2 題は次のとおりである.

問題 2.1([1]). 1/x<2 を解け.

問題 2.2([1]). 二次不等式-x(x-2)<a を解け. ただし, a は, 定数とする.

問題 2.1 では, x≥0 の場合と x<0 の場合に場合分けが必要で, 問題 2.2 では, -x(x-2)-a=0 の判別式が 0 以上の場合と 0 未満の場合に場合分けが必要である.

上の 2 題に対する 2 つの解法の比較の結果は表 2.1 のとおりである. 表 2.1 にある解法 2 のよさは, 表 1.1 の「視覚的にわかりやすく, 結果の確認がしやすい」が要因となっている.

表 2.1:問題 2.1 と問題 2.2 の 2 つの解の比較

	解法 1	解法 2
場合分け	必要だが気づきにくい	必要性に気づきやすい, あるいはグラフが既知の場合は不要
誤答の可能性	場合分けの必要性に気づかないことによる可能性がある	左の可能性は少ない 解答の理解により左の誤答の原因に気づくことができる

3 絶対値を含む問題

この節では, 絶対値を含む不等式を解く問題について, 2 つの解法の考察の概要を示す.

本研究では, 7 つの問題を対象としたが, どれも絶対値を含むことから, 場合分けの必要性が, 前節の問題と比べ明らかである. そのため, 解法 2 のよさは前節と同様には明らかでない. しかし, 解法 2 では, 絶対値のグラフには対称性があるという特性から, 解の見通しが立てやすくなっているよさがある. また前節の問題と同様に, 視覚的にわかりやすく, および, 結果の確認をしやすくなっているというよさはあると考える. このことは, 7つの問題を比較した結果, 解法 1 の場合分けが複雑になると, より顕著になっている.

以下, 7 つの問題のうちの 2 題とその 2 つの解法による略解を示す.

問題 3.1. |x+3|<4 を解け.

解 1(解法 1).
x>-3 のとき, |x+3|<4⇔x<1 だから, -3≤x<1 である.
x<-3 のとき, |x+3|<4⇔x>-7 だから, -7≤x<-3 である.
よって, 求める不等式の解は, -7<x<1 である.

解 2(解法 2). y=|x+3|のグラフと y=4 のグラフを図 3.1 に示す. ここで, 2 つのグラフの交点の x 座標は, 対応する方程式を解くことで, x=1,-7 とわかる. よって, 図 3.1 より, 求める不等式の解は-7<x<1 である.

問題 3.2. |x+3|≧|4x|を解け.

解 1(解法 1).
x<-3 のとき, |x+3|≥|4x|⇔x≤1 だから, -3<x≤1 である.
-3≤x<0 のとき, |x+3|≥4x⇔-3/5≤x だから, -3/5≤x<0 である.
0≤x のとき, |x+3|≥4x⇔1≤x だから, 0≤x である.

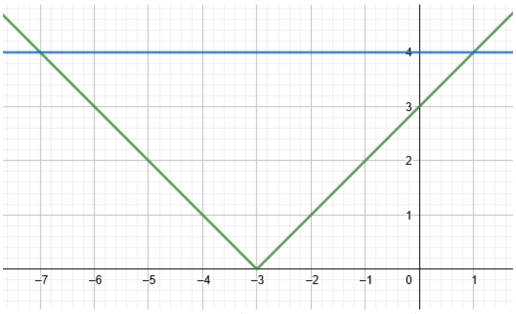

図 3.1: y=|x+3|のグラフと y=4 のグラフ

よって，求める不等式の解は，-3/5≤x≤1 である．

解 2(解法 2)． y=|x+3|のグラフと y=|4x|のグラフを図 3.2 に示す．ここで，2 つのグラフの交点の x 座標は，対応する方程式を解くことで，x=-3/5,1 とわかる．よって，図 3.2 より，求める不等式の解は-3/5≤x≤1 である．

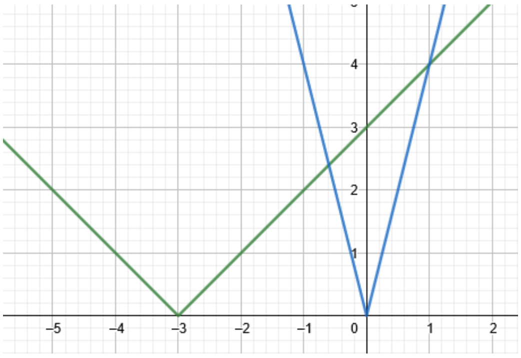

図 3.2: y=|x+3|のグラフと y=|4x|のグラフ

4 応用問題

この節では，定数 a を含む不等式の応用問題の考察の詳細を述べる．考察の主な結果は，表 1.1 のとおりであり，以下では扱った 1 つの応用問題とその 2 つの解法による略解を示す．

問題 4.1. 次を満たす定数 a の範囲を求めよ．
0≤x≤5 のすべての x に対して，x^2-(a+1)x+a+2>0 (*)

上の問題に対応する方程式の問題を示す．

問題 4.2. 次を満たす定数 a の範囲を求めよ．
0≤x≤5 に，x^2-(a+1)x+a+2=0 の解がある．

上の問題 4.2 は，方程式の左辺を f(x)とおいて，放物線 y=f(x)の頂点の x 座標が，0 以下，0 以上 5 未満，5 以上の 3 つの場合に分けて a の範囲を求める．よって問題 4.1 の解法 1 による解は次のようになる．

解 1(解法 1)．f(x)=x^2-(a+1)x+a+2 とおくと，

$$f(x)=(x-(a+1)/2)^2-a^2/4+a/2+7/4$$

となる．y=f(x)のグラフは，軸が x= (a+1)/2 の放物線である．したがって次の 3 つの場合に分けることにより，f(x)の最小値から a の範囲を求められる．
(i) (a+1)/2≤0，つまり，a≤-1 のとき，0≤x≤5 における f(x)の最小値は f(x)=a+2 であることから，この場合の a の範囲は-2<a≤-1 とわかる．
(ii) 0<(a+1)/2<5，つまり，-1<a<9 のとき，0≤x≤5 における f(x)の最小値が f((a+1)/2)=-a^2/4+a/2+7/4 であることから，この場合の a の範囲は-1<a<1+2$\sqrt{2}$とわかる．
(iii) 5≤(a+1)/2，つまり，9≤a のとき，0≤x≤5 における f(x)の最小値が f(5)であることから，この場合では(*)を満たす a はないとわかる．
したがって，(i),(ii),(iii)より， 求める a の範囲は，

$$-2<a<1+2\sqrt{2}$$

である．

解 2(解法 2)．定数 a が右辺に一箇所だけ現れるように，与えられた不等式を x^2+1>(a+1)(x-1)と同値変形する．y=x^2+1 のグラフと y=(a+1)(x-1)のグラフを図 4.1 に示す．後者の直線は，点(0,1)を通る場合の直線 q と，前者の放物線に接する場合の直線 r の 2 本を示している．

(*)を満たすには，直線の傾き a+1 が，q の傾き-1 より大きく，r の傾きより小さければよい．ここで，r の傾きは，p と r が接することから，k=2+2$\sqrt{2}$とわかる．よって，

$$-1<a+1<2+2\sqrt{2}$$

すなわち，

$$-2<a<1+2\sqrt{2}$$

である．

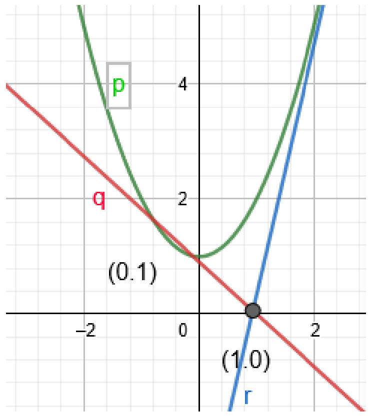

図 4.1: y=x^2+1 のグラフと y=(a+1)(x-1)のグラフ

参考文献

[1] 桑原利通，「高等学校数学科における統合的・発展的に考察する力を高める学習指導の工夫―解決の過程や結果を振り返り，新たな数学の事象につなげていくパフォーマンス評価を通して―」，平成 30 年度教員長期研修（前期）教員長期研修生の研究，広島県立教育センター，2018