ユークリッド原論と中学校の幾何問題

2016SE060 長瀬隼大
指導教員: 佐々木克巳

1 はじめに

永野[3]では, ユークリッド原論において幾何問題が基本的な公理と公準に基づいて証明されていることが紹介されている. 故に, ユークリッド原論では, 証明における各推論の根拠を読み取ることができ, それらは形式的な視点で整理することで, より分かりやすくなると感じた. 本研究の目的は, ユークリッド原論における各命題の証明を形式的な視点から整理することで, 理解を深めることである. 具体的には, 中村他[2]で紹介されているユークリッド原論の命題 1〜命題 26 とその証明を, 形式的な表現で整理して, [1]などで紹介されている中学校の証明と比較する. 本稿では, 2 節で, 命題 1~命題 26 の形式的な整理の概観を示す. 3 節で, 命題 1〜命題 26 の導出関係を図で示し, そのうち, 中学校数学で扱われている命題については, [1]などの教科書で扱われている説明や証明と比較する.

2 各命題の証明

本研究は, [2]の第 1 章の命題 1〜命題 26 とその証明を形式的な視点から整理した. この節では, その概観を示す.

[2]の命題には, 作図問題と証明問題がある. [2]において, 作図問題は,「命題」,「特述」(「命題」を, 記号をつけた特殊な形で表現したもの),「作図」(作図の具体的な方法),「証明」(「作図」で述べた図形が「命題」で述べた条件を満たすことの証明),「結論」の 5 つに分けて述べられ, 証明問題は, このうちの「作図」と「証明」を,「証明」(命題の証明)でおきかえ,「命題」,「特述」,「証明」,「結論」の 4 つに分けて述べられている. 本研究では,「結論」は省略し, 残りの部分は, 現代の用語を用いた表現を用いて, 次のように各命題を扱った.

・「証明」は, 3 つの方法で, [2]よりも整理した形で記述する. 第一に,「証明」は, 証明を構成する文を並べた表で表現する. 表の列は文番号, 文, 根拠で構成され, さらに, 文番号の列は,「P から Q が導かれた」のような導出関係を一つの根拠として扱うために, その導出関係の証明に現れる文番号の列を, 別の列に記載する. 第二に,「証明」は[2]の証明の根拠を適宜補って示す. 第三に, [2]の定義, 公準, 公理のどれにも該当しない根拠が用いられている場合は, 性質として, 証明の後に示す.

・作図問題における「証明」は, 作図すべき図形が存在することの証明を示す. その証明における存在証明は条件を満たす具体的な「もの」を示すことで行うので, 実質的に[2]の証明で述べている内容を含んでいる. 加えて, 存在証明をしていることから, 作図に必要な図形の定義可能性も含めて証明がされていることになる.

・円や線分に関する表現を定義して, この定義からわかる記述を省略する. 例えば, 次の表現を定義している.

定義 2.1. 公準 3 より, 円は中心 O と半径 r (r>0)からかくことができる. 本研究では, この円を円(O,r)とかく.

3 各命題の関係と中学校での教育との関係

この節では, 命題 1〜命題 26 の導出関係を図で示し, そのうち, 中学校数学で扱われている命題については, [1]などの教科書で扱われている説明や証明と比較する.

命題 1〜命題 26 の導出関係は, 図 3.1 の実線の矢印のとおりである. ただし, 推移的な矢印(P→Q, Q→R のときの P→R の矢印)は省略している.

一方, 26 の命題のうち, 中学校の数学でも扱われているものは次の 7 つである. ただし, 一部表現を変えているものがある.

命題 4. 2 辺とその間の角がそれぞれ等しい二つの三角形は等しい.

命題 5. 底角定理.

命題 6. 底角定理の逆.

命題 8. 3 辺のそれぞれ等しい二つの三角形は等しい.

命題 13. 一直線上の二つの接角の和は 2 直角に等しい.

命題 15. 対頂角は等しい.

命題 26(前半). 2 角とその間の辺がそれぞれを等しい二つの三角形は等しい.

これらのうち命題 4, 命題 8, 命題 13, 命題 26(前半)は, 中学校では直観的な説明のみがされて, 正しいと認められている. 一方, 命題 5, 命題 6, 命題 15 には証明が与えられている. そのうち, 命題 5 と命題 6 の中学校の説明を考察した結果を以下に示す. なお,

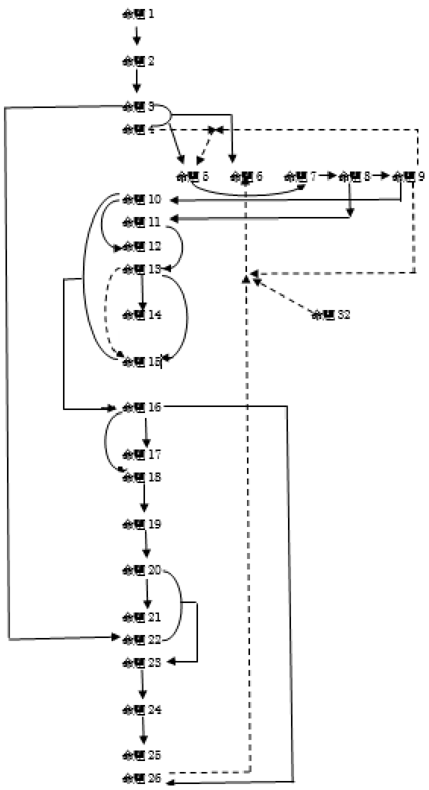
図 3.1:各命題の関係

命題 26(後半). 2 角とその 1 角に対する辺を等しくする二つの三角形は等しい.
は, 本研究の比較の対象外とする.

[1]における命題 5(底角定理)の証明を, 形式的な視点から整理して示す. [1]の証明では, 次の性質 3.1 を前提としている.
性質 3.1.
(1)2 つの三角形において, 2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいならば, 合同である.
(2)合同な図形では, 対応する辺の長さと角の大きさは, それぞれ等しい.
[1]における命題 5(底角定理)の証明. ∠A の二等分線と辺 BC との交点を D とする. 定理は, 次のように示される.

(1)	∠BAD=∠CAD	仮定
(2)	AB=AC	仮定
(3)	AD=AD	共通(公理 7)
(4)	△ABD≡△ACD	(1),(2),(3),性質 3.1(1)
(5)	∠B=∠C	(4),性質 3.1(2)

上の証明では, 冒頭で角の二等分線の作図(命題 9)を用いている. また, 上で用いられた性質 3.1 は, 本質的に命題 4 と同等である.

[1]における命題 6(底角定理の逆)を形式的な視点から整理して示す. [1]の証明では, 次の性質 3.2 を前提としている.
性質 3.2.
(1)三角形の内角の和は 180° である.
(2)2 つの三角形において, 1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいならば, 合同である.
(3)合同な図形では, 対応する辺の長さと角の大きさは, それぞれ等しい.
[1]における証明. ∠A の二等分線と辺 BC との交点を D とする. 定理は, 次のように示される.

(1)	∠BAD=∠CAD	仮定
(2)	∠B=∠C	仮定
(3)	∠ADB=∠ADC	(1),(2),性質 3.2(1)
(4)	AD=AD	共通(公理 7)
(5)	△ABD≡△ACD	(1),(3),(4),性質 3.2(2)
(6)	AB=AC	(5),性質 3.2(3)

上の証明では, 冒頭で角の二等分線の作図(命題 9)を用いている. また, 性質 3.2(1)は本質的に命題 32 と同等で, 性質 3.2(2)と(3)は本質的に命題 26(前半)と同等である.

前述のとおり, 上の証明では, 図 3.1 のいくつかの命題と同等な性質が用いられているが, それらの命題と命題 5, 命題 6, 命題 15 との導出関係をまとめると, 次のとおりである(図 3.1 では, 破線の矢印で示している).
・命題 5 は, 命題 4 と命題 9 から導かれる.
・命題 6 は, 命題 9 と命題 26 と命題 32 から導かれる.
・命題 15 は, 命題 13 から導かれる.

図 3.1 の導出関係より, 中学校における命題 5(底角定理)の証明で用いられた命題 9 の根拠をユークリッド原論に求めるならば, 命題 5 を用いることになり, 循環が起こることが分かる.

一方, 命題 15 の証明は, ユークリッド原論の証明と本質的に同じであり, 同じような循環は起きていない.

参考文献

[1] 岡本和夫ほか 46 名,『未来へひろがる 数学 2』, 啓林館, 大阪, 2015
[2] 中村幸四郎・寺坂英孝・伊東俊太郎・池田美恵, 『ユークリッド原論』, 共立出版, 東京, 2011
[3] 永野裕之,『オーケストラの指揮者を目指す女子高生に「論理力」がもたらした奇跡』, 実務教育出版, 東京, 2017