論理パズルにおけるタブローと真理値表による解法の比較

2014SE060 松原隆太郎
指導教員：佐々木克巳

1　はじめに

3 年次のソフトウェア工学演習の授業で，[3]などで紹介されている．論理パズルの複数の数理的な解法に興味をもった．具体的な解法は，[2]で紹介されているタブローによる解法と，[1]で紹介されている，真理値表による解法の 2 つである．

本研究の目的は，[3]の論理パズルに対し，上の 2 つの解法による解を与え，それらを比較し，双方のよさを考察することである．

本研究では，[3]で紹介されている複数の論理パズルを考察した．本稿ではそのうちの，[3]の第 1 章「正直者と嘘つきの論理学」の問題について述べる．具体的には，以下の 2 節でスマリアンの論理パズルの概要を示し，3 節で真理値表による解法を，4 節でタブローによる解法を紹介する．そして，5 節で[3]の 1 つの問題について真理値表とタブローを用いて解を求め，双方のよさを考察する．

2　スマリアンの論理パズル

この節では，スマリアンの論理パズルの概要を示す．

スマリアンの論理パズルは，ある島の住民の発言から，与えられた条件の成立・不成立を求めるパズルである．ただし,その島には次の前提条件がある．

条件 2.1.

(1) 島の住民は，騎士か悪漢のどちらかである．

(2) 騎士は，自分の信じることを正直に発言し，悪漢は，自分の信じることの否定を発言する．

(3) 島の住民は，イカレているか，マトモかのどちらかである．

(4) イカレている人々が信じることはすべて間違っている，マトモな人々が信じることはすべて正しい．

本稿では，常に正しいことを発言する住民を正直者，常に間違ったことを発言する住民を嘘つきとよぶことにする．

以後，住民 X に対して，「X は正直者」を t(X)，「騎士」を k(X) と表す．また，2 つの文 P,Q に対し，「P または Q」を P∨Q，「P かつQ」を P∧Q，「P と Q が同値」であることを P≡Q，P の否定を¬P と表し，「矛盾」を⊥と表す．さらに 2 つの真理値「真」，「偽」をそれぞれ t，f と表す.条件 2.1(1)，(2)より，¬t(X)，¬k(X) はそれぞれ，「X は嘘つき」，「X は悪漢」と表すことになる．

また，本稿で扱う問題では，住民はすべてマトモである．つまり，t(X) ≡k(X) が成り立つ．

3　真理値表による解法

この節では，真理値表による解法を，[1]にしたがって述べる．その解法は，条件 2.1 から導かれる次の性質に基づいている．

性質 3.1. 島の住民 X が P と発言したとき，t(X) ≡ P(本稿で扱う問題では，k(X)≡P) が成り立つ．

真理値表による解法: 島の住民 X が P と発言したとき，t(X) ≡P(本稿では,k(X)≡P)と求めたい条件(文)の真理値表をかき t(X) ≡P が真(本稿では,k(X)≡P)となる行から解を求める方法.

4　タブローによる解法

この節では，タブローによる解法を，[2]にしたがって述べる．

定義 4.1. 文の有限集合 S に対して，S のタブローを次のように定義する．

(1) S に属する文を，縦に並べた図は S のタブローである．

(2) S のタブローT とその 1 つの枝を θ とする．

(2.1) θ に現れる文から文 P が導かれるとき，T の θ の下に P を書き加えてできる図は，S のタブローである．

(2.2) θ に文 P∨Q が現れるとき，T の θ の下に P　Q を書き加えてできる図は，S のタブローである．

性質 4.2. S は正しい文の集合，T は S のタブローとする．T に，⊥の現れない枝がちょうど 1 つだけあるとき，その枝に現れる文はすべて正しい．

タブローによる解法: 問題文などから明らかに正しいとわかる文の集合に，定義 4.1(2)の操作を，次の 2 つの条件を満たすまで適用したタブローT をつくり，(条件 2)の「解を導く文」から解を導く方法.

(条件 1) T に，⊥の現れない枝がちょうど 1 つある．

(条件 2) (条件 1)の枝に，解を導く文が現れる．

以下では，タブローに現れる各文には番号をつけ(すでに番号がつけられている文は，その番号も用いる)，定義 4.1.(2.1)で加えられた文 P の右に，その根拠となる θ の文の番号を「∵…」の形で書き加える．(2.2)の場合は，P,Q の右に，もとになっているP∨Q の番号を書き加える．

5　具体例

この節では，[3]で紹介されている 1 つの問題について,真理値表とタブローを用いて解を求め両者を比較する.

問題 1(要約).　3 人の住民 A，B，C が次の発言をした.

A:「私たち 3 人の中でただ 1 人だけが悪漢だ」(*1)

B:「私たち 3 人の中でただ 2 人だけが悪漢だ」(*2)

C:「私たち 3 人全員が悪漢だ」 (*3)

3 人はそれぞれ騎士か，それとも悪漢か.

真理値表による解．性質 3.1 に基づく問題 1 の同値性は，A,B,C の発言をそれぞれ P_A,，P_B，P_C とすると，次のようになる.

1)　　k(A)　≡ P_A (1 人だけが悪漢だ)

2)　　k(B)　≡ P_B (2 人だけが悪漢となる)

3)　　k(C)　≡ P_C (3 人全員が悪漢)

この 3 つの同値性の真理値表は，表 5.1 のようになる.

表 5.1:　問題 1 の真理値表

k(A)	k(B)	k(C)	P_A	P_B	P_C	1)	2)	3)
t	t	t	f	f	f	f	f	f
t	t	f	t	f	f	t	f	t
t	f	t	t	f	f	t	t	f
t	f	f	f	t	f	f	f	t
f	t	t	t	f	f	f	f	f
f	t	f	f	t	f	t	t	t
f	f	t	f	t	f	t	f	f
f	f	f	f	f	t	t	t	f

表 5.1 より，3 つの同値性がすべて真になるのは 6 行目だけになるため，A は悪漢，B は騎士，C は悪漢となる.

タブローによる解 1([3]に沿った解)．この問題のタブローを図 5.1 に示す.

1.　　*1,*2,*3
2.　　どの2人に対しても「「2人の発言がともに正しい」ことはない」
3.　　どの2人に対しても「2人のうち1人は悪漢」　　(∵2)
4.　　2人以上が悪漢となる　　(∵3)
5.　　¬k(C)　　(∵*3)
6.　　¬(3人全員悪漢)　　(∵5,*3)
7.　　2人だけ悪漢　　(∵4,6)
8.　　k(B)　　(∵7,*2)
9.　　¬k(A)　　(∵7,*1)

図 5.1 タブローによる解法 1

性質 4.2 より上のタブローの枝に現れる文はすべて正しい．よってタブローの 5,8,9 より，A は悪漢，B は騎士，C は悪漢となる.

タブローによる解 2 (k(A)∨¬k(A)から分岐する場合).　この問題のタブローを図 5.2 に示す.

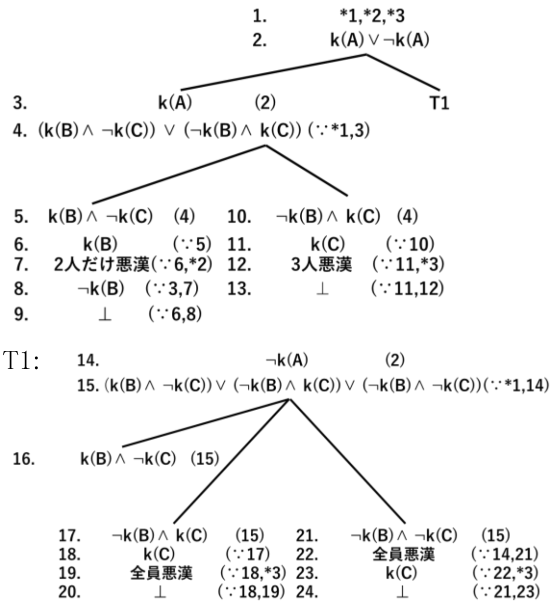

図 5.2 タブローによる解法 2

図 5.2 のタブローにおいて，⊥が現れない枝は 16 を含む枝のみである．性質 4.2 より 16 を含む枝に現れる文はすべて正しい．よってタブローの 14,16 より，A は悪漢, B は騎士, C は悪漢となる.

真理値表のよさ.　必要な条件をすべて入力し，同値性の関係を出力することによって，すべての組み合わせに対して，求める条件の成立・不成立を判断できる．この作業は，機械的に行うことができる一方で，解を導くのに不必要な情報も含んでいる.

タブローによる解法のよさ.　解法が 1 つだけでなく，多数の視点から，アプローチでき，そのアプローチに応じて複数の解がある．本稿でも 2 つの解をあげている．また，真理値表のように，すべての組み合わせを考察しなくても解を求めることができる．例えば，図 5.2 のタブローでは, 3 番で真理値表の 1,2,3,4 行に限定され，4 番で真理値表の 2,3 行に限定される．また，14 番で真理値表の 5,6,7,8 行に限定され，15 番で真理値表の 6,7,8 行に限定される．以上のことより，真理値表の 1,4,5 行を計算しなくても解を求めることができる．一方，タブローでは，その推論の数(文の数)も定まっておらず，うまく推論を選べば，その数も少なくてすむ．具体的には,図 5.1 のタブローは 7 個の推論(9 個の文)で構成されるが,図 5.2 のタブローは 15 個の推論(24 の文)で構成されている．ただし，その推論の選び方の判断は容易ではない.

参考文献

[1] 佐々木克巳,『2019 年度「理工学概論(真理値表と論理パズル)」講義資料』,南山大学,2019

[2] 佐々木克巳,『2019 年度ソフトウェア工学演習 VII 講義資料』,南山大学,2019

[3] Raymond Smullyan,『スマリアン 記号論理学 一般化と記号化』,丸善出版,東京,2013