グラフ理論を題材にした数学教育

2016SS066 篠原恒貴

指導教員：小藤俊幸

1　はじめに

学習指導要領の改定により新しく「数学 C」が追加され新しい内容では「数学的な表現の工夫」が追加された．図，表，統計グラフ，離散グラフ及び行列などを用いて，日常の事象や社会の事象などを数学的に表現し，考察することを身につけるのが目的とされ，学習内容の例として最短経路の探索が取り上げられている（[1]、pp.125-126）．

しかし，教科書も作られてはおらず，具体的な学習内容も定まっていない．

本研究では最短経路を求める問題、ハミルトン閉路を求める問題を題材にした授業案を作成することを最終目標とする。

2　グラフ理論の基礎事項

ここではグラフ理論の基礎的事項について説明する．

グラフ理論のグラフとは点と線からなるもので，点は頂点，線は辺または弧と言われる [2]．ここでは頂点を経由ポイント，辺の重みを距離または時間を表すとして進める．

2.1　最短経路問題

最短経路問題の解法の一つであるダイクストラ法 [3] について説明する．ダイクストラ法とはグラフ理論における辺の重みが非負数の場合の単一始点最短経路問題を解くための最良優先探索によるアルゴリズムである [4]．

では，実際に例題を用いて最短経路問題を解く．下図にある s から t までの最短経路を求めたい．

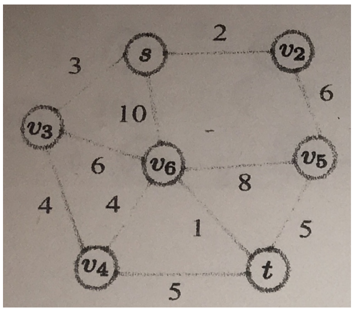

図 1　最短経路問題の例

丸で囲ってあるものは経由可能頂点を示し，辺の上に書いてある数字は距離もしくは時間を示している．

今回は数字を距離として考えていく．s から t までの行き方はたくさんある．どのように最短経路を求めるのかダイクストラ法を用い最短経路を求める．

図 2 を用いて説明をする．

手順 1:始点 s から探索を始める．

手順 2:始点から行動可能な頂点への辺を色を塗る。

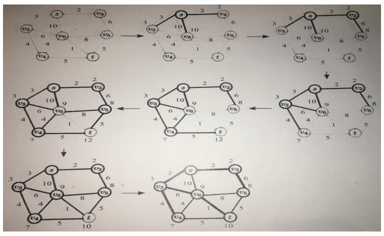

図 2　ダイクストラ法の解法

手順 3:始点 S からの距離を頂点に更新する．

手順 4:更新した頂点の中から数が最小のポイントを塗りつぶす．

手順 5:塗りつぶした頂点は探索済みとなり，始点 S からの最短が求まる．

手順 6:塗りつぶした頂点から行動可能な頂点への辺を色を塗る．

手順 7:起点となったポイントから行動可能な頂点までの距離を足し，距離を更新する．

手順 8:更新した距離が他の更新した経路とかぶっていた場合，総距離が短い方を最短経路とし，距離を更新する．

手順 9:終点 t を塗りつぶしているなら手順１０へ，塗りつぶしていないならば，手順 4 へ戻る．

手順１０:終点 t に更新した数字が最短総距離となり、始点 s から終点 t までの最短経路が求まる。

図 1 の場合の最短経路は $s \to v_3 \to v_6 \to t$ となり最短経路の総距離は 10 と求まる。このようにして最短経路を求めることができる．しかし最短経路を求める方法はダイクストラ法だけではない．次に紹介するハミルトン閉路は最短経路問題や最適配置問題を解くために用いられている基礎的な考えだ．では，次にハミルトン閉路を求める問題について説明する．

2.2　ハミルトン閉路を求める問題

ハミルトン閉路とは，与えられたグラフにすべての頂点を 1 回ずつ通り出発点に戻る閉路のことだ．ハミルトン閉路であるかどうかの条件は現在研究されている．数学的性質について最初の結論が現れたのがデンマークの数学者ガブリエル・アンドリュー・ディラックが十分条件としてディラックの定理を述べた．[6]

まずハミルトン閉路は 3 つ以上の頂点があるグラフである．また，すべての頂点の次数が $\frac{頂点数}{2}$ 以上ならばハミルトン閉路をもつと定理された．次数とは頂点から伸びている辺の本数のことという．図 3 参照

しかしこの定理に当てはまらない場合が存在する．図 4 参照

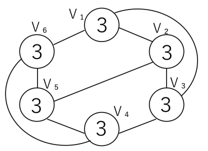

図 3　ディラックの定理の例

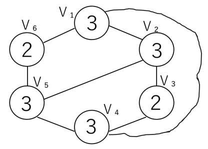

図 4　ディラックの定理の十分条件が満たされない例

2.3　まとめ

ダイクストラ法とハミルトン閉路を求める問題を説明してきたが 2 つのグラフ理論の違いは大きく 2 つある．1 つ目はすべての頂点を通るかどうかだ．ダイクストラ法はスタートからゴールまでの最短を通るように数個の頂点を通る．しかし，ハミルトン閉路を求める問題はすべての頂点を通ってゴールを目指す違いがある．2 つ目はゴールの違いだ．ダイクストラ法はスタートとゴールが違うがハミルトン閉路を求める問題はスタートとゴールが同じという違いがある．この 2 つの違いを踏まえた上で授業計画を作っていく．

3　授業案

ここでは一般的な公立高等学校で授業することを想定し，50 分授業を 2 時限分検討する．1 限目は日常の疑問からダイクストラ法の紹介と解法を学ぶ．2 限目ではダイクストラ法を復習し，発展内容として巡回セールスマン問題にも触れ 2 つの手法の違いに気づき，2 つの手法の説明と違いをまとめさせる．

3.1　1 限目

導入としてマップ機能の最短経路がどのように決まっているのか生徒に問題提起させる．[思] 生徒同士話し合って日常の疑問を問いかける．おそらく正解は得られないので最短経路問題を紹介する．具体例を見せたほうが理解しやすいので図 1 を提示しダイクストラ法を説明する．まず，生徒に図 1 の最短経路を求めるように問いかける．生徒はダイクストラ法で求めるのではなく，手当たりしだい道順を探し最短を求める．［思・判］ここで，手当たりしだいではなく数学的に解けるダイクストラ法を紹介する．説明方法は第 2 節の最短経路問題で説明したように教える．しかし 1 回で理解はできないので例題を用いて生徒自身に解かせる．［主体・知］紹介したところでカーナビゲーションやスマホのマップ機能にもダイクストラ法が使われていることを言い生徒の興味・関心を引く．調べる手順を教えたことで終盤にダイクストラ法の解法の流れを個人で考え，記述させる．［思・表・知・主体］時間が余ったら別のマップを準備しダイクストラ法の練習を行う．次回予告としてハミルトン閉路を求める問題を習うことを伝える．

3.2　2 限目

1 限目の続きとして復習でダイクストラ法を解かせる．発展内容としてハミルトン閉路を求める問題を説明する．しかしいきなり説明せず，導入として図 1 を提示し生徒にすべてを通る最短経路を各自で考えさせる．［思・表・主体］答えが出たら道順を生徒に聞き最短経路の確認をする．最短経路を見つけたらハミルトン閉路を求める問題の説明する．説明方法は第 2 節ハミルトン閉路を求める問題で説明したように教える．説明が終わったら例題を 1 問解く．［思・表・判断・知・主体］解き終わったら最後にハミルトン閉路が存在する条件等を説明，同じ最短経路を求めるダイクストラ法とハミルトン閉路を求める問題の違いを記述させる．［表］授業終盤ハミルトン閉路を求めることで発展的な内容として巡回セールスマン問題 [5] を紹介する．

4　おわりに

グラフ理論を学ぶことで日常の事象や社会の事象を表現でき，生徒の思考力，判断力，表現力を身に付けることができる [1]．コンピュータの発達と共にグラフ理論が必要不可欠なものになっている [7]．今回グラフ理論の例としてダイクストラ法，巡回セールスマン問題を扱ったがグラフ理論は他にも存在する．数あるグラフ理論を扱うことにより現実社会を絡めることで子供の関心が高まり学力向上が見込まれると思った．また，授業の最後に個人の考えを記述させる授業構成にしたことから，記述力の向上にも繋がる．

5　参考文献

参考文献

[1] 文部科学省 :「高等学校学習指導要領 (平成 30 年告示) 解説数学編 理数編」平成 30 年

[2] 一森 哲男 :「グラフ理論」共立出版株式会社，東京，2002 年

[3] Dijkstra, E.W. :「A note on two problems in connexion with graphs」In Numerische Mathematik, 1959 年

[4] 小市 俊吾 :「幾何と離散構造 A」大学講義資料, 愛知,2017 年

[5] 福島 雅夫 :「新版 数理計画入門」株式会社朝倉書店, 東京,2014 年

[6] アーサー・ベンジャミン ほか 2 名 :「グラフ理論の魅惑の世界」青土社, 東京,2015 年

[7] 一森 哲男 :「グラフ理論」共立出版株式会社, 東京,2002 年