

# 和算を用いた数学教育

2016SS056 大橋彪正

指導教員：小藤俊幸

## 1 はじめに

和算とは17世紀初頭の日本で誕生した数学のことをいい、この言葉は明治以降から西洋数学の洋算に対しての用語として呼ばれるようになったものである。江戸時代には算学、算法、算用などと呼ばれていた。和算は現代数学と違って縦書きであり、漢数字や甲乙といった文字を用いた独自の式表示で表されていた。

和算の問題は、高校生を対象に多くの教材化がなされており、高校教育現場においても教材化資料を活用しての実践が展開されている。[1] それは子どもたちの知的好奇心を刺激してやる気を起こさせるためである。[2]

だから少しでも多くの生徒が興味を持つような教師自らによる教材開発として和算問題を実際に用いた授業展開を行いたいと考え、本研究では三角関数に視点をおき、実際に授業を行うのかを考えた。

本研究では、安井金比羅宮（やすいこんびらぐう）奉納算題四季詠（ほうのうさんだいしきよみ）の五月問題を取り上げる。

## 2 授業案

今回の授業案では、50分授業のうち五月問題を50分（一コマ分）で行いたいと思う。

また今回は高校2年生を対象に授業をするものとする。

平成30年度に公示された高等学校新学習指導要領の数学科における評価の観点は、

- ・知識及び技能【知】
- ・思考力・判断力・表現力等【思】
- ・主体的に学習に取り組む態度【主】

である。本論文では、後者の評価の観点を使用する。

## 3 九曜の文様-五月問題-

次の問題は数学の三角関数の半角の公式を習い終わってからの応用問題として取り扱うとする。

### 【問題】

幟を九曜に染める。大円の直径と小円の直径を合わせると二尺ある。二つの直径のそれぞれの長さを求めよ。[1]



図1 幟と九曜紋

### 【この問題の目標】

1. 大円の半径と小円の半径で関係式を作る。【知・思】
2. 半角の公式が利用できる。【知】
3.  $\sin \frac{\pi}{8}$  は正であることの記述。【知・思】
4. 研究課題（宿題）として高さ6の七曜紋の円の直径を求める問題を出す。【思・主】

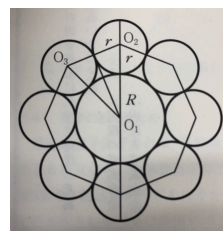


図2 作図

### 【導入】

5分程度で行う。

問題をやる前に生徒には江戸時代の鎖国をしていた頃の日本独自で発達した和算というものを今日は触れるという話をする。

また今回の問題は京都にある安井金比羅宮というところに奉納されてるものであり、その算題四季詠という月ごとに詠っており、それが数学の問題になっているという昔の芸事であることも話す。

問題説明後の導入を15分程度で行う。

幟とは旗のことであり、実際に九曜紋が描かれている幟を写真か絵で説明する。

その後、九曜紋が作図された紙（図1）を生徒に配布する。その後問題の説明と誘導として

- ・大円の半径を  $R$ 、小円の半径を  $r$  とすること。
- ・大円の中心を  $O_1$ 、小円の中心を  $O_2, O_3$  とした時、 $\angle O_2 O_1 O_3 = \theta$  とおく。

・ $O_1$  から  $O_2 O_3$  に垂線を下ろし、交わる点を  $M$  とした時、 $\angle O_2 O_1 M$  が  $\theta$  で表すとどうなるのか問う。【主・思・知】

・三角形  $O_2 O_1 M$  と三角比  $\sin \frac{\theta}{2}$  との関係性を図示。 $O_1 O_2$  と  $O_2 M$  の長さがどうなるのか問う。【主・思】

・半角の公式を問う。【主・知】

・大円の直径と小円の直径を足して二尺ではなく、高さ（大円の直径一つ分と小円の直径二つ分）が二尺であるということ述べる。

これは現代語訳にした際のズレである。

生徒に問う場合は、生徒同士で意見交流をした後とする。そうすることによって、導入でつまづく生徒を減らすことができる。

### 【展開】

20 分程度で行う。

生徒が解く間は机間指導する。その後問題の説明する。二尺になることから図より

$$1 = R + 2r \text{【知・思】} \quad (1)$$

先ほどの導入から

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{r}{R+r} \text{【知・思】} \quad (2)$$

が出来ていることを確認する。

(1) と (2) を連立方程式として解く。すると

$$R = \frac{1 - \sin \frac{\theta}{2}}{1 + \sin \frac{\theta}{2}}, \quad r = \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{1 + \sin \frac{\theta}{2}}$$

ここで  $\theta$  は何度になるのかを隣同士で考えてもらい、時間をかける。そして答えてもらう。【主・知】

1 周  $2\pi$  であり、三角形  $O_1O_2O_3$  と同じ形の三角形が 8 個できることより  $\angle O_2O_1O_3 = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$  となる。

$\theta = \frac{\pi}{4}$  とわかったのであとは  $\sin \frac{\pi}{8}$  の値を求めたい。 $\frac{\pi}{8}$  は 2 倍すると  $\frac{\pi}{4}$  ということを利用する。【思】  
よって半角の公式を変形 (再確認)

$$\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{2}$$

その式に  $\theta = \frac{\pi}{4}$  を代入し  $\sin^2 \frac{\pi}{8}$  を  $\sin \frac{\pi}{8}$  に直す。

ここで  $\sin \frac{\pi}{8}$  に直す時、何を記述するのか問う。【主・知・思】

$$\begin{aligned} \sin^2 \frac{\pi}{8} &= \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \\ \sin \frac{\pi}{8} &> 0 \text{ より【思】} \\ \sin \frac{\pi}{8} &= \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} \text{【知】} \end{aligned}$$

(2) に  $\sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$  を代入し、分子分母に 2 をかけると

$$R = \frac{2 - \sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2 + \sqrt{2 - \sqrt{2}}}, \quad r = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2 + \sqrt{2 - \sqrt{2}}}$$

生徒のレベルによってだが、ヒントとして

$$R = \frac{2 - A}{2 + A}, \quad r = \frac{A}{2 + A}$$

というような形になると与える。ここで答えとして終わっても良いのだが、

具体的な値を知るためには電卓を使用すると下のようになると説明する。

$$\sqrt{2 - \sqrt{2}} \doteq 0.76536686... \text{より}$$

$$R \doteq 0.4466... \quad r \doteq 0.2767...$$

となり、求めてほしいものは直径であることより

大円の直径は約 0.8932 尺、小円の直径は約 0.5534 尺である。

### 【まとめ】

5 分程度で行う。

宿題を与える時間とし、九曜紋をやってみたので次は高さが 6 の七曜紋で問題を与えて次回の授業までにやるように指示。

九曜紋があるということは、こういう七曜紋のようなものもあると思うから求めてみようといった流れで宿題へと持っていく。

答えは大円も小円も直径 2 の同じ大きさの円となる。

またこの問題は別解としてできた三角形  $O_1O_2O_3$  が正三角形になることより三角比を使用せずに簡単に解けることを伝える。

ここで数学の別解があるという面白さに気づいてくれる生徒が増えると良いと思う。

(次回のはじめに確認。)

宿題を出すことにより生徒の【主】の部分の評価することができ、数学的な見方・考え方をさせることが出来る。

また問題から少し変えることで新しい問題が出来るということも知り、発展的な考え方ができるようになる。

## 4 おわりに

このように和算から取り入れた問題を高校生に解かせ、教えるのは非常に面白い。特に今回の三角関数では、公式に当てはめれば良いと思っている生徒たちは詰まってしまう。

和算を取り入れることによって形式的な解き方ではなく、考え、判断し、表現する解き方・力がつくだろう。

また今回の九曜紋の総経さえわかれば大円と小円の直径を求めることが出来るということに面白いと思える生徒も出てくると思う。

これが一人でも多くの生徒に興味を持たせるための教材開発として和算を取り組んだ理由の一つである。

## 5 参考文献

- [1] 平野年光：『算額問題の教材化 和算 -安井金比羅宮奉納算額「算題四季詠」から-』。東洋館出版社 2014。
- [2] 田村三郎：『今、なぜ和算なのか』。現代数学社 2015。
- [3] 正田實 他 24 名：『高等学校 数学 B』。第一学習社 2013。