フィールドにおける紛失物捜索に対する効率的な方法

2016SS001 青樹瞳

指導教員：福嶋雅夫

1　はじめに

捜索理論はオペレーションズ・リサーチ（OR）における古典的な分野であるが，現実のさまざまな捜索問題に広く応用できるため，その研究は現在も続けられている [1].

本研究では構造が単純な広い土地での，紛失物の探知探索の効率化について考える．本研究で考察する探知探索では紛失物は一つであり，捜索者は一人とする．移動は歩いてするものとし，フィールドを区画の集まりとして考える．目的は，制限時間内に紛失物を発見する確率が最大となるように，フィールドを捜索することである．

2　問題の設定

制限時間内に紛失物を発見する確率が最大となるようなフィールド内の移動の仕方を考える．長方形のフィールドを横方向と縦方向に等間隔に区切った区画の集まりとし，横座標 $i \in I := \{1, 2, ..., n\}$，縦座標 $j \in J := \{1, 2, ..., m\}$ を用いて区画を (i, j) と表す（図 1）．捜索の開始時刻を $t = 1$，制限時間を l とし，時刻を $t \in T := \{0, 1, ..., l\}$ で表す．

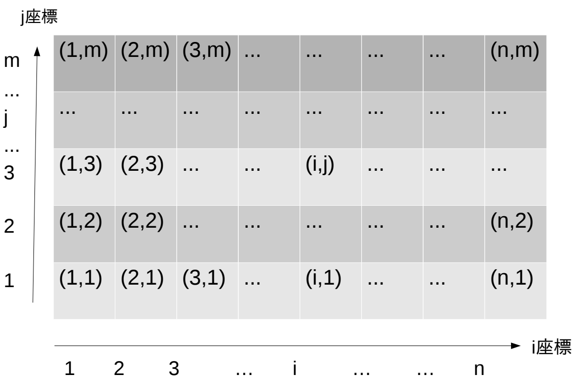

図 1　フィールドと区画

紛失物はいずれか一つの区画内にあるとし，紛失物が各区画に存在する確率は既知とする．1 単位時間で捜索するのは一区画とし，1 単位時間進むと，縦方向または横方向に最大で一区画だけ移動できるものとする．各区画で紛失物を発見できる確率は（その区画に紛失物が存在する場合）捜索時間が長くなれば大きくなる．

3　目的関数

区画 (i, j) において，紛失物が存在する確率を $g(i, j)$ とする．紛失物が区画 (i, j) に存在するならば，区画 (i, j) において合計 $y(i, j)$ 時間捜索したとき，紛失物が発見される確率を $P(i, j, y(i, j))$ とする．また，区画 (i, j) に紛失物が存在する場合，1 単位時間だけ区画 (i, j) を捜索したとき紛失物を発見する確率は既知とし，それを $p(i, j)$ とすれば，制限時間内に区画 (i, j) を $y(i, j)$ 時間捜索することにより紛失物を発見できる確率は $P(i, j, y(i, j)) = 1 - (1 - p(i, j))^{y(i,j)}$ となる．したがって，フィールド全体で紛失物を発見できる確率は次式で与えられる．

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} g(i, j)[1 - (1 - p(i, j)^{y(i,j)})] \tag{1}$$

区画 (i, j) において，紛失物を発見する確率は捜索時間 $y(i, j)$ に関する単調増加な凹関数である．以下では，凹関数を区分的に線形近似することを考える．変数 $z(i, j, k) \quad (k = 0, 1, ..., K)$ をもちいて，区画 (i, j) での総捜索時間 $y(i, j)$ を $y(i, j) = \sum_{k=0}^{K} kz(i, j, k)$ と表すと，式 (1) の関数は次の関数によって区分的線形近似ができる．

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} \sum_{k=0}^{K} g(i, j)[1 - (1 - p(i, j))^k]z(i, j, k) \tag{2}$$

ただし，$y(i, j)$ と $z(i, j, k)$ は次式をみたす．

$$y(i, j) = \sum_{k=0}^{K} kz(i, j, k) \quad ((i, j) \in I \times J) \tag{3}$$

$$\sum_{k=0}^{K} z(i, j, k) = 1 \quad ((i, j) \in I \times J) \tag{4}$$

$$z(i, j, k) \geq 0 \quad (k = 0, 1, 2, ..., K) \quad ((i, j) \in I \times J) \tag{5}$$

式 (2) の関数が目的関数となり，式 (3)，(4)，(5) は問題における制約条件として取り扱われる．

4　制約条件

4.1　捜索を表す変数

各時刻 t において，区画 (i, j) を捜索する場合 1，捜索しない場合 0 の値をとる変数を $x(i, j, t)$ と表す．

$$x(i, j, t) \in \{0, 1\} \quad ((i, j) \in I \times J)(t \in T) \tag{6}$$

4.2　捜索に関する制約

捜索者は任意の時刻 t において，一区画のみを捜索する．すなわち，各時刻 t において $x(i, j, t)$ はすべての区画の中で一区画に対してのみ 1 の値をとる．このことから，以下の式が成り立つ．

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} x(i, j, t) = 1 \quad (t \in T) \tag{7}$$

4.3　移動に関する制約

時刻 $t \in \{2, 3, ..., l\}$ において，捜索者が区画 (i, j) にいるとき，$x(i, j, t) = 1$ である．このとき，時刻 $t-1$ で捜索者がいた可能性がある区画は (i, j) の i 座標方向または j 座標方向に隣接した区画（ただし、フィールド内に限る），もしくは時刻 t と同じ区画 (i, j) のみである．このことから，以下の式が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
x(i,j,t) \leq \quad & x(i,j,t-1) + x(i-1,j,t-1) \\
& + x(i,j-1,t-1) + x(i+1,j,t-1) \\
& + x(i,j+1,t-1) \\
& \quad ((i,j) \in I \times J)(t \in T)
\end{aligned} \tag{8}
$$

$$
\begin{aligned}
x(i,0,t) = x(i,m+1,t) = 0 \quad (i \in I)(t \in T) \\
x(0,j,t) = x(n+1,j,t) = 0 \quad (j \in J)(t \in T)
\end{aligned} \tag{9}
$$

4.4　区画ごとの総捜索時間に関する制約

制限時間内に区画 (i, j) を捜索する時間の合計を $y(i, j)$ とすれば，$y(i, j)$ は $x(i, j, t)$ を用いて次のように表される．

$$
y(i,j) = \sum_{t \in T} x(i,j,t) \quad ((i,j) \in I \times J) \tag{10}
$$

5　問題

これまでに述べたことをまとめると，本研究で考察する問題は式 (3)〜(10) で表される制約条件のもとで，式 (2) で表される目的関数を最大化する混合 $0-1$ 計画問題として定式化される．

6　数値実験

最適化ソルバ Gurobi[2] をもちいて，プログラムの作成を行った．

6.1　モデル

0.3	0.3	0.3	0.3	0.3
0.4	0.4	0.4	0.4	0.4
0.8	0.8	0.8	0.8	0.8
0.8	0.8	0.8	0.8	0.8
0.9	0.9	0.9	0.9	0.9

図 2　フィールド（区画内の数字は $p(i, j)$）

アーチェリーをしているという想定で，射って的に当たらず矢をなくしたばあいをモデルとする．フィールドは的を中心とした射場内横縦 $20m$ とした $400m^2$，とし，これを横縦それぞれ 5 つに区切る．区画が 25 個となり，一区画の大きさは横幅縦幅ともに $4m$ となる．捜索する時間は 5 分間，一区画あたりの捜索時間を 30 秒とする．今回考えるフィールドは手前を $j = 1$，奥を $j = 5$ とし，的は区画 $(3, 3)$ にあるとする．奥は草が覆い茂っており見つかりにくく，手前は草が短いためそこにあったばあいは見つかりやすいとすると，$p(i, 5)$ は値が小さくなり，$p(i, 1)$ は値が大きくなる（図 2）．実験では，矢が落ちていそうな区画とその周辺の区画での存在確率 $g(i, j)$ について 4 つのケースを想定した．（図 3）

6.2　結果と考察

ケース1

0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
0.01	0.1	0.1	0.1	0.01
0.01	0.1	0.1	0.1	0.01
0.01	0.1	0.1	0.1	0.01
0	0	0	0	0

ケース2

0.1	0.1	0.11	0.1	0.1
0.06	0.06	0.07	0.06	0.06
0.02	0.04	0.06	0.04	0.02
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

ケース3

0.2	0.1	0.06	0.01	0.01
0.1	0.1	0.06	0.01	0.01
0.08	0.06	0.02	0.1	0.01
0.03	0.03	0.01	0.01	0.01
0.02	0.02	0.01	0.01	0.01

ケース4

0.01	0.01	0.01	0.02	0.02
0.01	0.01	0.01	0.03	0.03
0.01	0.01	0.02	0.06	0.08
0.01	0.01	0.06	0.1	0.1
0.01	0.01	0.06	0.1	0.2

図 3　4 つのケースに対する最適解（区画内の数字は $g(i, j)$）

図 3 は，4 つのケースに対する実行結果をまとめたものである．これらの結果により，基本的には存在確率が高い区画を中心に捜索していると言えるが，ケース 2 のように，必ずしも存在確率が高い区画の方が低い区画よりも総捜索時間が大きいとは限らない．また，ケース 1 とケース 2 とケース 3，4 を比較すると，存在確率が 0 の（絶対に存在しないと言える）区画の数が多いと，捜索をする区画の数（総区画数）は多くなると言える．

7　おわりに

本研究では，紛失物を捜索するとき制限時間内に発見できる確率を大きくする問題について，その定式化を行い，どのような捜索の仕方が効率がいいかを数値実験により考察した．ただし，この定式化では，時間をめいっぱい使って捜索したときに発見できるかということを問題としており，最短時間で発見するという要素はない．したがって，時間内だけでなく最短時間で発見するにはどうすればよいかを考えることが今後の課題である．

参考文献

[1] 飯田耕司，宝崎隆祐：捜索理論 捜索オペレーションの数理，三恵社，1998 年

[2] 久保幹雄，J.P. ペドロソ，村松正和，A. レイス：あたらしい数理最適化 Phthon 言語と Gurobi で解く，近代科学社，2012 年