

多重連結領域上の安定非圧縮流の解析

2015SE034 加藤 舞 2015SE056 内藤 綾香

指導教員：横山哲郎

1 はじめに

流体力学の研究手段に、数値解析や離散解析がある。数値解析の利点は、優れた再現性と任意の条件設定が容易であることであり、欠点は必要とされる計算量やメモリ量が大きいことである [1]。一方、離散解析は計算量やメモリ量が小さく、数値解析では計算量が大きく対象にできない問題も扱うことが可能である。

離散解析の例として、2次元多重連結領域上の非圧縮流をトポロジーによって分類する研究がある。分類の方法の1つに極大の語表現を用いる方法がある。この方法を用いて、翼の揚抵比の時間変化を表す研究が行われている [4]。区別のつきにくい流体運動による流線の様式の位相構造を文字列によって特徴づけることが可能である。一方、1つの語表現に複数の流線パターンが存在するという欠点もある [2]。分類の他の方法に木文法を用いる方法がある。木文法は、語表現より多くの流線を区別でき、直感的に解釈しやすい方法であると言われている。計算機科学の分野の人に広く知られており、理解が容易である。

流体力学において流れの反転のメカニズムに未知の部分が残されている。反転を判別することができれば、医療の分野などで役立つ可能性が高いと考えられる。したがって、トポロジー的な情報だけ反転を判別できるかを研究主題とした。本稿では、トポロジーが分かれば流れの特徴をつかむことができると考え、判別は可能であるという仮説をたてた。また、本研究では木文法を用いて離散解析を行う。木文法の表現力は、筆者が知る限り示されていない。よって、副主題として、木表現は語表現と比べて流れの特徴をどの程度表現できるか調査した。

2 関連研究

2.1 前提条件

本研究が使用する木文法の研究では、有界な多重連結領域上で非圧縮性かつ非粘性の構造安定な流れであることを前提条件に研究が行われている [3]。よって、本研究でも、この前提条件で解析を行う。

多重連結領域とは、複数の障害物が含まれている領域のことである。障害物を1つ含む領域を単連結領域と呼ぶことから、多重連結領域は単連結領域が2つ以上組み合わさってできた領域であると言い換えることもできる。非圧縮性とは、連続体の密度が変形の前後で変化しないという性質のことであり、非粘性とは、流れに対する抵抗がない性質のことである。構造安定とは、小さな乱れが加わっても流れの位相的構造が変化しない状態のことである。位相はトポロジーとも呼ばれ、形を曲げたり伸ばしたりなどして変形しても保たれる性質のことである。例えば、トポロジーで考えればドーナツとマグカップは本質的に同じものであると言える。

2.2 木文法

木文法は、 $G = (S, N, \mathcal{F}, R)$ によって定められる。 S は開始記号、 $N = \{S, A, B_+, B_-, C_+, C_-, C_+^*, C_-^*\}$ は非終端記号の集合、 $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\epsilon \cup \mathcal{F}_A \cup \mathcal{F}_B \cup \mathcal{F}_C \cup \{l, \lambda, cons(\cdot)\}$ は終端記号の集合、 R は生成規則である。 $\mathcal{F}_\epsilon, \mathcal{F}_A, \mathcal{F}_B, \mathcal{F}_C$ はそれぞれ、 $\mathcal{F}_\epsilon = \{a_0(), b_{0+}(\cdot, \{\cdot\}), b_{0-}(\cdot, \{\cdot\})\}$, $\mathcal{F}_A = \{a_+(\cdot), a_-(\cdot), a_2(\cdot)\}$, $\mathcal{F}_B = \{b_{++}(\cdot, \cdot), b_{+-}(\cdot, \cdot), b_{-+}(\cdot, \cdot), b_{--}(\cdot, \cdot), \beta_+(\cdot), \beta_-(\cdot)\}$, $\mathcal{F}_C = \{c_+(\cdot), c_-(\cdot)\}$ である。生成規則 R は以下のように表す。

$$\begin{aligned} S &\rightarrow a_0(A^*) \mid b_{0+}(B_+, \{C_+^*\}) \mid b_{0-}(B_-, \{C_+^*\}) \\ A &\rightarrow l \mid a_+(B_+) \mid a_-(B_-) \mid a_2(C_+^*, C_-^*) \\ A^* &\rightarrow \lambda \mid A \cdot A^* \\ B_+ &\rightarrow l \mid b_{++}\{B_+, B_+\} \mid b_{+-}(B_+, B_-) \mid \beta_+\{C_+^*\} \\ B_- &\rightarrow l \mid b_{--}\{B_-, B_-\} \mid b_{-+}(B_-, B_+) \mid \beta_-\{C_-^*\} \\ C_+ &\rightarrow c_+(B_+, C_-^*) \\ C_- &\rightarrow c_-(B_-, C_+^*) \\ C_+^* &\rightarrow \lambda \mid C_+ \cdot C_+^* \\ C_-^* &\rightarrow \lambda \mid C_- \cdot C_-^* \end{aligned}$$

生成規則は、既存の形式言語理論が拡張されている。既存の形式言語理論では扱われていない $\{\cdot\}$ が用いられているが、これは円順列を同一視し、上下が反転しても良いとしていることを表している。一方、順序対は中括弧と区別するために $()$ を用いている。木文法を用いて作成された記号列を木表現と呼ぶ。

2.3 流れの構造

木文法によって生成された木は、流線図を表している。流線図を構成する各流れの構造は、多重連結領域上で、3つの基本パターン、 A 系の流れ構造、 B 系の流れ構造及び C 系の流れ構造がある。3つの基本パターンを図1に示す。これは、 \mathcal{F}_ϵ の要素の流れの構造を表している。図1に \square_T^L という記号がある。 \square は、ホールという。 T は流れの向きと、どの非終端記号から生成される木を入れるかを示す。また、 L はホールが複数ある場合に区別するためのラベルである。ラベルは文脈から明らかな場合は省略できる。図1の左図は、一様流を表す a_0 である。図1の中央図と右図は、共に最外境界部がある円盤状の流れを表す。 b_{0+} は反時計周りの円盤状の流れを表し、 b_{0-} は時計周りの円盤状の流れを表す。

3 予備実験

本研究は、流れの向きを判断する指標を2つ設けた。予備実験では、チャタリングを防ぐために、その2つの指標でそれぞれ「反転」と判断する条件を設定した。チャ

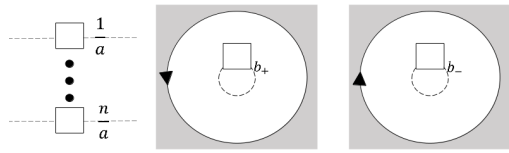


図 1 3つの基本パターン

タリングとは、スイッチが切り替わる時に、微細で非常に短い間隔のオン/オフが発生する現象のことである。

3.1 2つの指標

指標1では、1フレームの中で最も大きい面積を占める流線の流れの向きを、フレーム全体の流れの向きと判断する。流線の流れの向きと最も大きい面積の流線の発見は、実験者が動画を見て判断したため、客観性が欠けてしまう場合がある。しかし、人が動画から流れの向きの変化を感じる感覚と近い結果が得られると考えられる。

指標2では、正規化角運動量の総和 $S(f)$ の符号をフレーム全体の流れの向きと判断する。角運動量とは、物体の回転運動の大きさのことであり、角運動量の総和とは、1フレームから格子状に区切ったそれぞれの角運動量の合計の値のことであり、本研究では、解析のしやすさのために、角運動量の総和を正規化した値を指標としている。正規化の方法は、3.4節で記述する。この指標は、データの値からフレーム全体の流れの向きを判断するため、客観性のある判断を行うことができると考えられる。

3.2 画像の準備と木表現の作成方法

予備実験やその後の解析、及び木表現の作成のために画像の準備を行う。まず、シミュレーション動画から1500フレームを画像1500枚として取り出す。次に、隣り合う流線の境界に線を引く。この境界線は、特異点を結んでいる。流線は等高線ようになっており、線の間隔が狭いほど回転が強く、広いほど回転が弱くなっていることを表す。流線の流れの向きが時計回りなら「-」、反時計回りなら「+」の符号を流線のピーク（丸く閉じているところ）の全てに描く。このとき、隣り合う流線の符号は反対となる。流れの向きを判断する際は、3.1節で記述した2つの指標で判断を行う。最後に、1つの流線に符号が2つ以上あれば、線に沿って8の字を描く。

画像の準備後、2.2節で記述した木文法を用いて画像から木表現を作成する。まず、フレーム全体の流れの向きを木文法の根とする。その後、木文法の生成規則に従い、開始記号から終端記号となるまで規則を適用させる。例として、図2に示されている流線図を木表現で表すと、 $b_{o+}(l, \{c_-(l, \lambda) \cdot c_-(l, \lambda)\})$ となる。

3.3 指標1の予備実験

指標1では、チャタリングによって反転が起こることを「反転失敗」、真の反転が起こることを「反転成功」と名前をつける。反転失敗の場合は、チャタリングの特性から短い間隔で反転が起こると考えられる。よって、一度反転が起こった後にある一定時間の間に再び反転が起

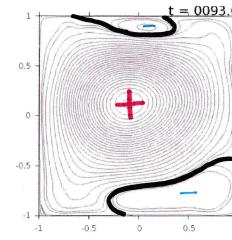


図 2 木表現の例： $b_{o+}(l, \{c_-(l, \lambda) \cdot c_-(l, \lambda)\})$

こってしまった場合、反転失敗とみなす。また、実験者が動画を見て、反転が起こったと感ずることができない間隔をある一定時間と定める。

反転成功と反転失敗のどちらも含めて、反転が起こったのは43回であった。43回から代表して、1度目の反転が起こり、3フレーム後に2度目の反転が起こる場合、7フレーム後に起こる場合、10フレーム後に起こる場合、13フレーム後に起こる場合の4パターンで、反転が起こったと分かるかどうかを調べた。その結果、10フレーム後と13フレーム後では、反転が起こったと判断することができた。しかし、3フレーム後と7フレーム後では、反転が起こっていたことが分からなかった。

この結果から、1度目の反転後にその向きの回転が10フレーム以上続いた場合は、反転成功とみなすこととする。つまり、「反転」と判断する条件は、1度目の反転後その向きの回転が0.5秒以上（10フレームは、動画では0.5秒の長さ）続くことである。以上のことを踏まえて、反転回数を調べると43回中11回がこの条件を満たした。

3.4 角運動量の総和の正規化

正規化の式は(1)で示した通りである。

$$y = \frac{x - x_{min}}{x_{max} - x_{min}}(M - m) + m \quad (1)$$

角運動量の総和の値が x で、 x の最小値は $x_{min} = -11448.781759272224$ 、最大値は $x_{max} = 11448.781759272224$ とした。 y の最大値は $M = 1.5$ 、最小値が $m = -1.5$ である。図3は正規化角運動量の総和 $S(f)$ のグラフである。

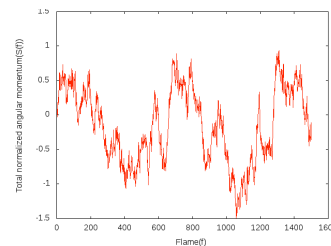


図 3 正規化角運動量の総和 $S(f)$

3.5 指標2の予備実験

指標2の予備実験は、正規化角運動量の総和 $S(f)$ と面積を流れの向きの判定条件に定めた。 $S(f)$ で求めた流れの向きと同じ流れは1つのフレーム内に複数あるため、同

じ向きの流れの中で最も中心で面積最大の流れをフレーム全体の流れとし、メインの流れと呼ぶ。

また、 $S(f)$ が一定以上の値となったとき反転と判定した。基準を設ける際、グラフの縦軸と横軸を考えた。グラフの縦軸は $S(f)$ であり、横軸はフレーム f である。図3の縦軸 $S(f)$ で基準を設定する場合は、 $S(f) = 0$ から0.1間隔で値を設定する。

同様に、図3の横軸 f で基準を設定する場合は、フレームの数を5, 10, 15, 20, 25, 30, 40, 100, 150で基準を設定した。各基準での反転回数を調査し、その結果をもとに基準を設定した。

各基準で反転回数を調査した結果を表1に示す。

表1 各基準での反転回数の比較

基準: $S(f)$		基準: フレーム幅	
$S(f)$ の基準値	反転回数	フレームの基準幅	反転回数
0.0	45	5	15
-0.1と0.1	21	10	9
-0.2と0.2	13	15	7
-0.3と0.3	9	20	4
-0.4と0.4	5	25	4
-0.5と0.5	4	30	4
-0.6と0.6	4	40	4
-0.7と0.7	4	100	4
-0.8と0.8	3	150	1
-0.9と0.9	1	-	-
-1.0と1.0	0	-	-
-1.5と1.5	0	-	-

結果から、どの基準が最も妥当であるかは議論の余地がある。しかし、短時間の間に反転が繰り返されるチャタリングを防ぐ為にある程度基準を絞ることができた。以下(1)~(3)に基準をまとめた。

- (1) 縦軸帯域: $|S(f)| < 0.3$
 - (2) 横軸帯域: フレーム幅 10
 - (3) 横軸と縦軸帯域: $|S(f)| < 0.3$ かつフレーム幅 10
- 定めた帯域に $S(f)$ の値がとどまる場合は反転としない。 $S(f)$ の基準は、表1の反転回数の平均に最も近い基準値とした。フレーム幅を10としたのは、3.3節で「反転成功」を10フレーム以上としたことをもとにした。

(1)~(3)の反転基準は、チャタリングを防ぎ、流れが変化する時の木表現の特徴を見つけるために設けた。

4 解析方法

予備実験の結果をもとに、指標ごとに反転前後に特徴的な流線が現れるのかを解析する。特徴的な流線が存在すれば、その流線は反転前後にのみ現れる特徴なのか、前後以外にも現れるのか、その結果の精度を求める。また、流れの向きの変化前後の木表現から、特徴的な規則が現れるのかを調査する。ただし、反転前後は流れが乱れ、流線が不安定になる可能性があるため、各指標で幅をもたせる。

5 結果

5.1 指標1の結果

11回の反転前後のフレームを解析した結果、流れが反転する前後に $b_{\pm\pm}$ の流線が現れる確率が高いことが分かった。(以降、 b_{++} 又は b_{--} を $b_{\pm\pm}$ と表す)この精度を確

かめるために、偽陰性と偽陽性を用いた。流れが反転する前に $b_{\pm\pm}$ が現れる場合と、反転した後に $b_{\pm\pm}$ が現れる場合に分けて、偽陰性と偽陽性を求めた。本研究の場合、 $b_{\pm\pm}$ が反転前に現れる場合の偽陰性とは、 $b_{\pm\pm}$ が反転前に現れていないのに反転する場合を指す。反転後に現れる場合も同様に考えられる。反転に参与している $b_{\pm\pm}$ は、面積が大きい $b_{\pm\pm}$ に限られていたため、 $b_{\pm\pm}$ のどちらの円の直径も0.8以上(1フレームは、 2.0×2.0 の大きさ)でないものは $b_{\pm\pm}$ とみなさないという制限を設けた。この制限を考慮した結果、1500フレームの中で $b_{\pm\pm}$ がメインに現れた回数は81回であった。この結果から、反転前と反転後の偽陰性と偽陽性を計算し、表2に表した。

表2 指標1: 偽陰性と偽陽性

	偽陰性		偽陽性	
	反転前に現れる場合	3回/11回 \Rightarrow 27.3%	反転後に現れる場合	73回/81回 \Rightarrow 90.1%
		1回/11回 \Rightarrow 9.1%		71回/81回 \Rightarrow 87.7%

また、指標1では流れの向きが変化する前後3フレームずつの幅をもたせて、木表現を解析した。その結果、反転の仕方を木表現で3パターンに分類することができた。この3パターンの反転の仕方を反転規則と呼ぶことにする。

1つ目の反転規則は、

$$b_{\circ\pm}(b_{\pm\pm}\{\square_{b_{\pm}}, \square_{b_{\pm}}, \square_{cs_{\mp}}\}) \rightarrow b_{\circ\mp}(b_{\mp\mp}\{\square_{b_{\mp}}, \square_{b_{\mp}}, \square_{cs_{\pm}}\})$$

である。本稿では複合同順を用いている。この反転規則が表す反転は、反転前と反転後のどちらのメインの流れにも $b_{\pm\pm}$ の流線が現れる反転である。この反転規則で表すことができる反転は、11回中7回であった。この反転を「基本的な反転」と呼ぶこととした。図4は、「基本的な反転」をしている反転の例である。

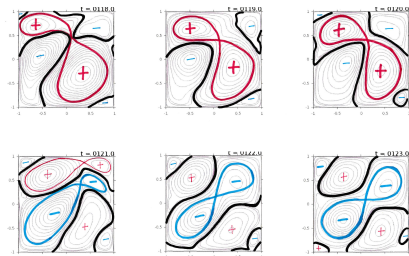


図4 基本的な反転

2つ目の反転規則は、

$$b_{\circ\pm}(l, \square_{cs_{\mp}}) \rightarrow b_{\circ\mp}(b_{\mp\mp}\{\square_{b_{\mp}}, \square_{b_{\mp}}, \square_{cs_{\pm}}\})$$

である。この反転規則が表す反転は、反転後のメインの流れにのみ $b_{\pm\pm}$ の流線が現れる反転である。この反転規則で表すことができる反転は、11回中3回であった。よって、この反転規則を「例外的な反転1」と呼ぶこととした。

3つ目の反転規則は、

$$b_{\circ\pm}(b_{\pm\pm}\{\square_{b_{\pm}}, \square_{b_{\pm}}, \square_{cs_{\mp}}\}) \rightarrow b_{\circ\mp}(l, \square_{cs_{\pm}})$$

である。この反転規則が表す反転は、反転前のメインの流れにのみ $b_{\pm\pm}$ の流線が現れる反転である。この反転規則で表すことができる反転は、11回中1回であった。この反転規則を「例外的な反転2」と呼ぶこととした。

5.2 指標 2 の結果

指標 1 の結果と同様，流体が反転する前後に $b_{\pm\pm}$ の流れが現れるという特徴が得られた．

また，反転前後の特徴に関して精度を確かめるため偽陰性と偽陽性を用いた．偽陰性と偽陽性を調査する際， $b_{\pm\pm}$ が現れるフレームのカウンタ方法に制限を設けた． $b_{\pm\pm}$ のカウンタ方法を以下 (1) ~ (3) のようにする．

(1) 基準： $|S(f)| < 0.3$

- $b_{\pm\pm}$ 出現から 5 フレームまでを 1 と数える
- 5 フレーム目に $b_{\pm\pm}$ 出現後 6 フレーム目でも $b_{\pm\pm}$ が出現する場合，6 フレーム目まで 1 と数える (6 フレーム以降同様)

(2) 基準：フレーム幅 10

- $b_{\pm\pm}$ 出現から 10 フレームまでを 1 と数える
- 10 フレーム目に $b_{\pm\pm}$ 出現後 11 フレーム目でも $b_{\pm\pm}$ が出現する場合，11 フレーム目まで 1 と数える (11 フレーム以降同様)

(3) 基準： $|S(f)| < 0.3$ かつフレーム幅 10

- (1) と同様

表 3 は各基準での偽陰性と偽陽性のまとめである．

表 3 指標 2：偽陰性と偽陽性

$ S(f) < 0.3$		
	偽陰性	偽陽性
反転前	0 回/9 回 ⇒ 0.0 %	100 回/109 回 ⇒ 91.7 %
反転後	2 回/9 回 ⇒ 22.2 %	102 回/109 回 ⇒ 93.6 %
フレーム幅 10		
	偽陰性	偽陽性
反転前	0 回/9 回 ⇒ 0.0 %	62 回/71 回 ⇒ 87.3 %
反転後	0 回/9 回 ⇒ 0.0 %	62 回/71 回 ⇒ 87.3 %
$ S(f) < 0.3$ かつフレーム幅 10		
	偽陰性	偽陽性
反転前	0 回/11 回 ⇒ 0.0 %	98 回/109 回 ⇒ 89.9 %
反転後	2 回/11 回 ⇒ 18.2 %	100 回/109 回 ⇒ 91.7 %

さらに，反転規則が指標 2 でも得られた．指標 2 では，チャタリングを防ぐための基準 (3.5 節の (1) ~ (3)) が (1) と (3) の場合は，流れの向きが変化する前後 5 フレーム，(2) の場合は 10 フレームの幅をもたせて木表現を解析した．指標 1 で得られた反転規則 3 パターンの内，フレーム幅のみで帯域を定めた場合は，「基本的な反転」の 1 パターン，それ以外の基準では「例外的な反転 1」を除く 2 パターンに分けられた． $S(f)$ のみで帯域を定めた場合は，9 回の反転中 7 回が「基本的な反転」だった．また， $S(f)$ とフレーム幅の両方で帯域を定めた場合は，11 回の反転中 9 回が「基本的な反転」だった．

一方，「基本的な反転」の中でも，以下のような 2 つの反転規則も見られた．

1 つ目は，反転後にメインの流れに $b_{\pm\pm}$ が出るのではなく，メインの流れと回転が同じ別の流れに $b_{\pm\pm}$ が現れる反転規則である．木表現で表すと

$$\begin{aligned}
 & b_{\phi\pm}(b_{\pm\pm}\{\square_{b_{\pm}}, \square_{b_{\pm}}\}, \square_{cs_{\mp}}) \\
 & \rightarrow b_{\phi\mp}(l, c_{\mp}(l, c_{\pm}(b_{\mp\mp}\{\square_{b_{\mp}}, \square_{b_{\mp}}\}, \square_{cs_{\pm}})) \cdot \square_{cs_{\pm}} \quad (2) \\
 & \rightarrow b_{\phi\mp}(b_{\mp\mp}\{\square_{b_{\mp}}, \square_{b_{\mp}}\}, \square_{cs_{\pm}})
 \end{aligned}$$

である．

2 つ目は，反転前にメインの流れに $b_{\pm\pm}$ が現れた後，メインの流れと回転が同じ別の流れに $b_{\pm\pm}$ が現れてから反転が起こる反転規則である．木表現で表すと

$$\begin{aligned}
 & b_{\phi\pm}(b_{\pm\pm}\{\square_{b_{\pm}}, \square_{b_{\pm}}\}, \square_{cs_{\mp}}) \\
 & \rightarrow b_{\phi\pm}(l, c_{\mp}(l, c_{\pm}(b_{\pm\pm}\{\square_{b_{\pm}}, \square_{b_{\pm}}\}, \square_{cs_{\mp}})) \cdot \square_{cs_{\mp}} \quad (3) \\
 & \rightarrow b_{\phi\mp}(b_{\mp\mp}\{\square_{b_{\mp}}, \square_{b_{\mp}}\}, \square_{cs_{\pm}})
 \end{aligned}$$

である．

反転の基準が $S(f)$ 又はフレーム幅では，木表現 (2) と (3) が 1 回ずつ現れた．反転の基準が $S(f)$ かつフレーム幅では，木表現 (2) が 2 回，木表現 (3) が 1 回現れた．

6 考察

指標 1 と指標 2 の両方で，反転前後だけでなく反転前後以外でも $b_{\pm\pm}$ が現れることから， $b_{\pm\pm}$ のみでは反転を判断することはできないと考えられる．しかし，反転するときには前後のどちらかに必ず $b_{\pm\pm}$ が現れる．指標 2 では，反転前には必ず現れることから， $b_{\pm\pm}$ は反転を判断するためには重要な特徴であると考えられる．

また，木文法を使うことで反転の規則を定式化することができた．語表現では，流れの向きを表現する方法がないため，この結果を得ることができなかったと考えられる．木文法により流れの表現力を高めることができた．

7 おわりに

本研究では，完全には流れの反転の特徴を見つけることはできなかった．したがって，本稿ではトポロジーだけで反転を判別できるとは言えない．しかし，一部ではあるが，反転の特徴を見つけることができたことから，トポロジーだけで判別できる可能性は高い．

また，本研究では木文法を用いて反転規則を定式化することができた．木表現は，語表現よりも流れの特徴を多く捉えることができ，反転のパターンを類別するのに十分な表現力があると言える．特に流体の回転では，流れの向きを考慮し重複なく表現できる木表現は有効である．

参考文献

- [1] 豊田国昭：実験流体力学の過去・現在・将来 (第 3 章) 実験流体力学と数値流体力学，ながれ，Vol.37, No.1, pp.61-68(2018)．
- [2] 坂上貴之，横山知郎，澤村陽一：二次元多重連結領域内における構造安定な非圧縮流れの文字列表現アルゴリズム，数理解析研究所講究録，Vol.1900, pp.11-25(2014)．
- [3] 横山哲郎，横山 知郎：ハミルトン曲面流に対応する流れの向きを考慮した極大語の列挙アルゴリズム，電子情報通信学会論文誌，Vol.J101-D, No.8, pp.1220-1222(2018)．
- [4] Sakajo, T. and Yokoyama, T.: Transitions between streamline topologies of structurally stable Hamiltonian flows in multiply connected domains, Physica D, Vol.307, pp.22-41(2015)．