2次元適応型積分則における誤差評価

2015SS080 椿　翔衣

指導教員：杉浦洋

1　はじめに

2次元領域において，定積分を求めることは数学の基本的な問題である．任意の2次元領域上の積分は，領域分割と変数変換により，長方形領域上の積分に帰着される．このことは，長方形領域上の数値積分法を作成することによって任意の2次元領域上の積分ができることを意味する．ゆえに，長方形領域上の積分則は基本的かつ重要である．

本研究は，2次元長方形領域上において，定積分を近似する適応型積分則を設計し，その値についての誤差評価を目的とする．

適応型積分則では，精度を高めるために長方形領域を小長方形領域に分割し，分割してできた全ての小長方形領域に同じ基本公式を適用する．このとき，誤差の小さい部分は粗く分割し，誤差の大きい部分は細かく分割する方法を用いることで，均等な分割法と同じ精度が，少ない分割数で達成できる．

長方形分割について過去に片峯 [2]，古田 [1]，野田 [3]，増田 [4] が研究している．片峯は，誤差推定公式を複数用いて信頼性の高い3次積分則を構成した．古田は，精度の高い5次再利用可能完全対称公式を作成した．野田は，積分に古田の公式を改良したものを用いて片峯より精度が高い適応型積分則を構成した．増田は，さらに次数の高い7次公式を作成し，より高精度な適応型積分則を設計した．

しかし増田の積分則は，組み込まれた誤差評価法による誤差評価が過大になる傾向があり，高精度基本公式の性能が十分発揮できていないように思われる．

そこで，本研究では，増田の誤差評価法をに再検討を加え，その改良をめざす．

2　数値積分則の設計

xy-平面上の長方形領域を $D=[a,b]\times[c,d]$ と書く．D 上の関数 f の積分を $Q(D)f=\int_D f(x)dxdy$ と置く．基本長方形領域 $\Delta=[-1,1]\times[-1,1]$ の n 個の標本点 $\boldsymbol{\pi}_1=(\xi_1,\eta_1),\boldsymbol{\pi}_2=(\xi_2,\eta_2),\cdots,\boldsymbol{\pi}_n=(\xi_n,\eta_n)\in\Delta$ と重み $\rho_1,\rho_2,\cdots,\rho_n$ による積分公式を

$$I_n f=\sum_{l=1}^{n}\rho_l f(\boldsymbol{\pi}_l)\cong\int_\Delta f(\boldsymbol{x})dxdy \tag{1}$$

と書く．

$\boldsymbol{q}\in\Delta$ から一般の長方形領域 $\boldsymbol{p}\in D$ へのアフィン変換 $\boldsymbol{p}=\varphi(\boldsymbol{q})$ による変数変換で

$$Q(D)f=\int_D f(\boldsymbol{p})dxdy=\frac{S}{4}\int_\triangle f(\varphi(\boldsymbol{q}))dtdu. \tag{2}$$

この右辺に積分則 I_n を用いて D 上の積分公式

$$I_n(D)f=\frac{S}{4}\sum_{i=1}^{n}\rho_i f(\varphi(\xi_i,\eta_i))\cong Q(D)f \tag{3}$$

を得る．ここで，S は D の面積である．

[定義 2.1]　任意の s 次式 f で $I_n(D)f=Q(D)f$ が成り立ち，かつ $I_n(D)f\neq Q(D)f$ となる $s+1$ 次式 f が存在するとき，積分公式 $I_n(D)$ は次数 s であると言う．//

3　適応型積分則の基本アルゴリズム

$\epsilon>0$ を許容誤差とする適応型積分則 $Q(D,\epsilon)$ は次のような再帰関数で表現できる．

$$Q(D,\epsilon)f=\begin{cases} I_n(D)f & (E_n(D)f\leq\epsilon)\\ Q(D_1,\frac{\epsilon}{2})+Q(D_2,\frac{\epsilon}{2}) & (E_n(D)f>\epsilon)\end{cases}$$

$E_n(D)$ は $I_n(D)$ の絶対誤差の評価式である．このアルゴリズムでは，与えられた許容誤差 $\epsilon>0$ に対し真の積分値 $Q(D)f$ の近似積分 $I_n(D)f$ を

$$|I_n(D)f-Q(D)f|\leq\epsilon \tag{4}$$

が満たされるなら採用する．もし，

$$|I_n(D)f-Q(D)f|>\epsilon \tag{5}$$

なら，D を辺に平行な直線で小長方形領域 D_1,D_2 に2等分し（図1），それぞれに同じ積分則 (3) を用いる．

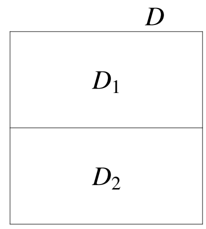

図1　長方形の分割

この操作を繰り返し，すべての小領域で許容誤差を満たしたとき，近似積分が完了する．辺に平行な直線によって等分割するため，選ぶ辺により，縦横2つの分割方向が考えられる．数値積分の効率を高めるためには分割方向の決定が重要である．

4　我々の適応型積分

基本積分則として，増田の7次再利用可能完全対称公式を用いる．標本点の配置を図2に · で示す．

標本点数44で，図3の ^{o} は分割時に必要となる新たな標本点である．分割時に必要な点数は35点であることがわかる．これが，増田の基本公式の分割コストである．

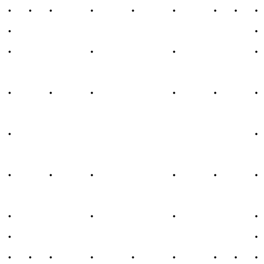

図 2 基本公式の標本点配置

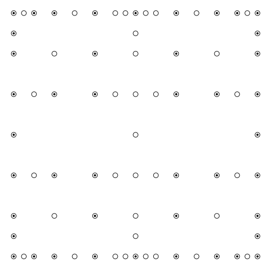

図 3 分割後の標本点配置

4.1 誤差推定

増田は，誤差評価に 1 次独立な 15 個の埋込み 5 次則を用いた．これらの 5 次則は，基本領域上の $u^{2k+1}v^l$ や $u^k v^{2l+1}$ などの片方の次数が奇数の単項式が正確に積分できない．一方，基本 7 次則はこれらを正確に積分することができる．そのため，埋込み 5 次則は基本 7 次則の誤差を過大に評価する可能性が高い．そこで，我々は埋込み 5 次則の中から 4 個の 1 次独立な対称則を選び，誤差評価に用いる．

ここで，対称則とは，対称標本点 (a,b)，$(-a,b)$，$(a,-b)$，$(-a,-b)$ に対する重みがみな等しい積分則である．対称則は，片方の次数が奇数の単項式を正確に積分するので，増田の誤差評価における誤差の過大評価が防げる．

Δ における標本点 $(\boldsymbol{\pi}_i)$ 上の任意の 7 次則の重みは，以下のように書ける．

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{\rho} + t_1\boldsymbol{c}_1 \tag{6}$$

ベクトル $\boldsymbol{\rho}$ は基本積分則の重みである．また，ベクトル $\boldsymbol{c}_1,\ldots,\boldsymbol{c}_8 \in \mathbb{R}^n$ は一次独立であり，t_1 は自由変数である．$\boldsymbol{c}_1$ が生成する部分空間を

$$V_7 =< \boldsymbol{c}_1 > \tag{7}$$

とする．同様に任意の 5 次以上の公式の重みは

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{\rho} + t_1\boldsymbol{d}_1 + t_2\boldsymbol{d}_2 + \cdots + t_5\boldsymbol{d}_5 \tag{8}$$

と書ける．ここで $\boldsymbol{d}_i \in \mathbb{R}^n$ $(1 \le i \le 5)$ であり $t_1,\ldots,t_5$ は自由変数である．また，ベクトル $\boldsymbol{d}_1,\ldots,\boldsymbol{d}_5$ は一次独立である．$d_1,\ldots,d_5$ が生成する部分空間を

$$V_5 =< \boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2, \ldots, \boldsymbol{d}_5 > \tag{9}$$

とする．$V_7 \subset V_5$ ゆえ V_5 における V_7 の直交補空間を $V_5^{\perp}$ とし，その正規直交系をあらためて $\boldsymbol{d}_1,\ldots,\boldsymbol{d}_4$ とする．すなわち

$$V_5^{\perp} =< \boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2, \ldots, \boldsymbol{d}_4 > \tag{10}$$

である．

重みを $\boldsymbol{w}_i = \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{d}_i \quad (1 \le i \le 4)$ とする公式を随伴 5 次公式と呼び，$I_n^i(D), (1 \le i \le 4)$ と書く．

公式 $I_n(D)$ と随伴 5 次公式との差

$$E_n^i(D)f = I_n^i(D)f - I_n(D)f \tag{11}$$

により，$I_n^i(D)$ の誤差評価を行うことができる．

$$E_n(D)f \equiv \alpha \max_{1\le i\le 4}\left|E_n^i(D)f\right| \tag{12}$$

とし，$E_n(D)f \le \epsilon$ ならば

$$\left|I_n(D)f - Q(D)f\right| \le \epsilon \tag{13}$$

であり，近似積分は成功したと判定する．ここで，ϵ は許容誤差，α は実験的に定める安全係数である．

5 数値実験

積分

$$If = \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy \tag{14}$$

を近似積分した結果を示す．

許容誤差 $\epsilon = 10^{-5}$ で計算した結果．増田の誤差は $2.01\times 10^{-6} < \epsilon$ となり積分は成功した．標本点数は 989 点，分割数は 27 回であった．我々の誤差は $3.60\times 10^{-9} < \epsilon$ となり積分は成功した．標本点数は 569 点，分割数は $(569-44)/35 = 15$ より 15 回である．精度の高い方法により，分割数を大きく減らすことができた．

より厳しい許容誤差 $\epsilon = 10^{-7}$ でも実験を行った．誤差は $1.63\times 10^{-8} < \epsilon$ となり積分は成功した．標本点数は 4349 点，分割数は 123 回である．許容誤差が 1000 分の 1 になり，変化の激しい原点の近くを細かく分割していることがわかる．増田の誤差は $1.41\times 10^{-9} < \epsilon$ となり積分は成功したが，標本点数は 4909 点，分割数は 139 回であった．標本点数は我々の結果より 560 点も多い．

6 おわりに

誤差評価が過大になる傾向にあった増田 [4] の誤差評価法をに，我々は対称則を用いて改良をし，より少ない数の埋め込み 5 次則で高精度な適応型積分則を構築するのに成功した．

増田 [4] 同様，Mathematica によるプログラムを作成し数値実験を行った．数値実験の結果，我々の方法は，許容誤差 10^{-5} より小さい時，増田 [4] の方法より使用標本点数と分割数が少なかった．また，2 変数ガウス関数の積分では許容誤差 10^{-7} で使用する標本点数は増田より 560 点も減少した．

参考文献

[1] 古田純也，長方形領域の再利用可能積分公式，南山大学数理情報学部情報システム数理学科 2012 年度卒業論文，2013.

[2] 片峯由莉香，長方形領域における 2 次元適応型積分則，南山大学数理情報学部情報システム数理学科 2011 年度卒業論文，2012.

[3] 野田健太，長方形領域における 2 次元 5 次適応型積分則，南山大学情報理工学部情報システム数理学科 2015 年度卒業論文，2016.

[4] 増田充宏，長方形領域における 2 次元 7 次適応型積分，南山大学情報理工学部情報システム数理学科 2017 年度卒業論文，2018.