

錯視立体の作製

2015SS036 宮川 真歩

指導教員：杉浦洋

1 はじめに

本研究では、杉原 [1] の「右を向きたがる矢印」をヒントに、線形方程式の解の理論に基づく両義立体の作製法について考察する。

線形方程式の解の理論に基づき、視点を頂点とする2つの無限三角形の交線を計算するプログラムを作製した。この交線は、2つの視点から別の線分に見えるという意味で両義立体の基本要素となる。そのプログラムより、2つの視点から異なる多角形が見える空間線図形を設計し、両義多角形と名付けた。両義多角形に厚みを持たせ、両義立体を設計する方法を開発した。それを、3D プリンタで出力することにより、実際に両義立体作品を作製した。

2 両義多角形

空間の多角形 P, Q を

$$\begin{aligned} P &= \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_m \\ Q &= \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n \end{aligned} \quad (1)$$

とする。 P の辺を

$$a_1 = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\}, a_2 = \{\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}, \dots, a_m = \{\mathbf{p}_m, \mathbf{p}_1\} \quad (2)$$

とし、 Q の辺を

$$b_1 = \{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2\}, b_2 = \{\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3\}, \dots, b_n = \{\mathbf{q}_n, \mathbf{q}_1\} \quad (3)$$

とする。

視点 e_0 からは P 、視点 e_1 からは Q に見えるような線図形 R は次のようにして作ることができる。

まず、無限三角形

$$\begin{aligned} T_i &= T(e_0, \mathbf{p}_i, \mathbf{p}_{i+1}) \quad (1 \leq i \leq m-1), \\ T_m &= T(e_0, \mathbf{p}_m, \mathbf{p}_1), \\ T'_i &= T(e_1, \mathbf{q}_i, \mathbf{q}_{i+1}) \quad (1 \leq i \leq n-1) \\ T'_n &= T(e_1, \mathbf{q}_n, \mathbf{q}_1). \end{aligned} \quad (4)$$

を定義する。そして、 R をこれらの無限三角形の交わりである線分の集合として、

$$R = \bigcup_{i=1}^m \bigcup_{j=1}^n (T_i \cap T'_j) \quad (5)$$

とする。 R は、視点 e_0 からは、辺 a_i ($1 \leq i \leq m$) の集まりとして見える。すなわち、多角形 P のように見える。同様にして、視点 e_1 からは、多角形 Q のように見える。

3 左を向きたがる矢印

杉原 [1] の作品に「右を向きたがる矢印」というものがある。右向きの矢印を 180° 回転すると、普通は左向きの矢印になる。杉原 [1] の作品は、不思議なことに、また右向きの矢印になる。

このような作品は次のようにして設計できる。我々は、「左を向きたがる矢印」を作ることにする。作品を中心にして、前後に視点 e_0, e_1 を置く。そして、手前の e_0 からは左手の方向を向いた矢印、奥の e_1 からも左手の方向を向いた矢印が見えるように作品を設計する。

座標を用いて表現すれば、作品の中心を座標空間の中心に置き、2つの視点を

$$e_0 = (0, -300, 300), e_1 = (0, 300, 300) \quad (6)$$

とする。 e_0 からは、 x 軸負の方向を向いた矢印 (図1)、 e_1 からは、 x 軸正の方向を向いた矢印 (図2) に見えるように設計する。

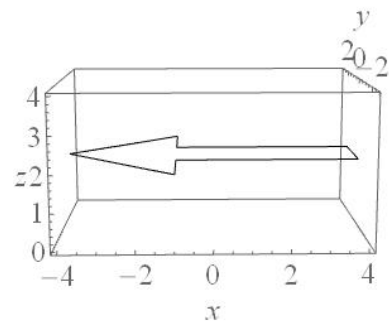


図1 e_0 から見た図

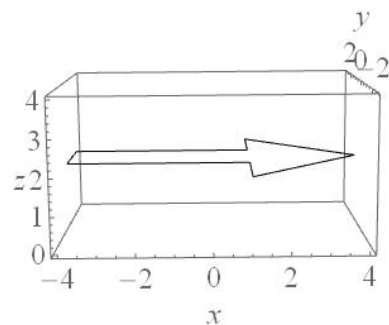


図2 e_1 から見た図

具体的には、左矢印多角形 P を、

$$P = \{(60, 0, 0), (15, 45, 0), (15, 15, 0), (-60, 15, 0), (-60, -15, 0), (15, -15, 0), (15, -45, 0), (60, 0, 0)\} \quad (7)$$

とし、右矢印多角形 Q は、 P を xz 平面で反転したものをを用いた。

第2章のアルゴリズムで制作した両義多角形 R を、図3に示す。

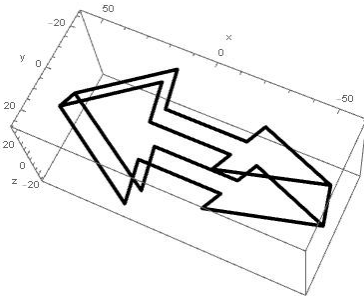


図3 両義多角形 R

両義多角形 R は、重複した矢印を含む複雑な図形である。その原因は、 e_0 からの視線が e_1 の無限三角形と2回交わるからである。この両義多角形から、重複する辺を除いて得られた多角形 R' を図4に示す。

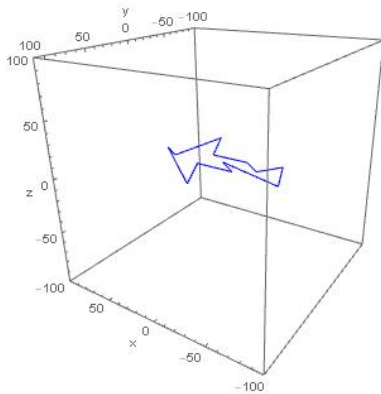


図4 両義多角形 R'

これに、垂直な壁を張り、厚みをつけて、実体化したものが、図5の作品「左を向きたがる矢印」である。

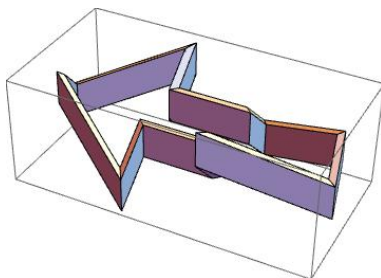


図5 左を向きたがる矢印 (自由視点)

これを視点 e_0 から眺めると、実際に左向き矢印に見える(図6)。

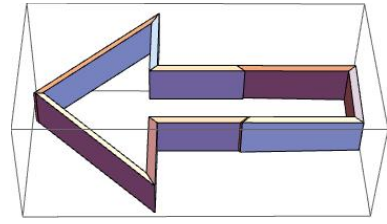


図6 左を向きたがる矢印 (視点 e_0)

これを、3Dプリンタで出力したものを、図7、図8に示す。

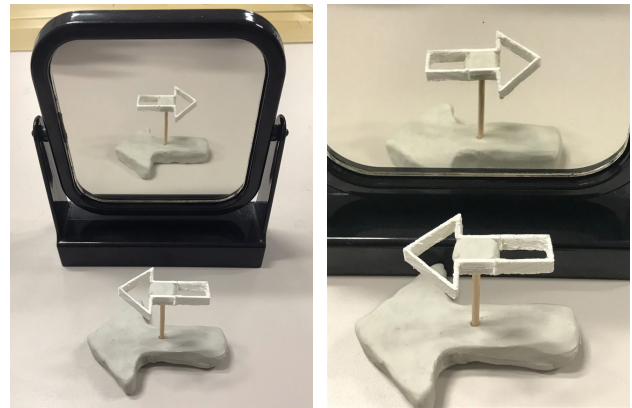


図7 鏡を利用して見た矢印

図8 近づいた写真

4 おわりに

杉原の両義立体「右を向きたがる矢印」をヒントに、「左を向きたがる矢印」を作製した。

両義多角形から、両義立体を設計する過程で、人間の判断が必要な作業が残っている。これを、プログラム化し、自動化することが望ましい。また、設計の過程で、2つの多角形の配置、大きさによっては、両義多角形が作れないことがわかった。自動的に多角形を配置し、縮尺して、両義多角形が作れるようにすることも、今後の課題である。

参考文献

- [1] 杉原厚吉：『だまし絵と線形代数』。共立出版，東京，2012。
- [2] Sugihara, Koukichi: Visual Media Culture Supported By Human Depth Illusion, Mathematical Progress in Expressive Image Synthesis 2015, Nishijin Plaza Kyushu University, Fukuoka, pp.16-22 (2015).
- [3] 後藤麻亜子：『3D プリンターによる錯視立体の作製 - 自由投影法-』。南山大学情報理工学部，2017。