安定回転する非回転対称体ゴマ

2015SS006　藤原英人
指導教員：杉浦洋

1　はじめに

一般にコマといえば，回転体を思い浮かべる．しかし，剛体力学によれば，コマが必ずしも回転体である必要はなく，剛体力学で言うところの「対称ゴマ」であるという条件を満たしていれば，安定に回り続ける．この研究の目的は，回転体でない対称ゴマの設計と製作である．

2　回転対称体の慣性モーメントテンソル

2.1　n 回対称の剛体

ある剛体に任意の角度で軸を通した際に，剛体をその軸に対して $\frac{2\pi}{n}$ 回転させると自らと重なる性質を n 回対称と言う（n は自然数）．回転対称体について，次の定理が成り立つ．

［定理 1］$n \geq 3$ のとき，z 軸に対して n 回対称である剛体 $\boldsymbol{V}$ が対称ゴマである．

（証明）条件より，$\theta = \frac{2\pi}{n}$ とし，

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{V} &= \bigcup_{k=0}^{n-1} \boldsymbol{V}_k, \\
\boldsymbol{V}_k &= \{(r\cos t, r\sin t, z) \in \boldsymbol{V} \mid k\theta \leq t < (k+1)\theta\} \\
&\quad (0 \leq k \leq n-1)
\end{aligned}
$$

とすると，

$$\boldsymbol{V}_k = R_{k\theta} \cdot \boldsymbol{V}_0$$

である．ここで，

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

である．また，

$$P(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} y^2+z^2 & -xy & -zx \\ -xy & z^2+x^2 & -yz \\ -zx & -yz & x^2+y^2 \end{bmatrix}$$

とすると，剛体 $\boldsymbol{V}$ の慣性モーメントテンソル I は，

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{\boldsymbol{V}} \rho P(\boldsymbol{x}) dxdydz = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\boldsymbol{V}_i} \rho P(\boldsymbol{x}) dxdydz \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\boldsymbol{V}_0} \rho P(|det R_{k\theta}|\boldsymbol{x}) dxdydz \\
&= \int_{\boldsymbol{V}_0} \sum_{k=0}^{n-1} \rho P(R_{k\theta}\boldsymbol{x}) dxdydz \\
&= \rho \int_{\boldsymbol{V}_0} \sum_{k=0}^{n-1} P(R_{k\theta}\boldsymbol{x}) dxdydz \\
&= \rho \int_{\boldsymbol{V}_0} P_n(\boldsymbol{x}) dxdydz
\end{aligned}
$$

となる．ここで，

$$P_n(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=0}^{n-1} P(R_{k\theta}\boldsymbol{x})$$

である．次に，

$$P(R_{k\theta}\boldsymbol{x}) = n \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(x^2+y^2)+z^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(x^2+y^2)+z^2 & 0 \\ 0 & 0 & x^2+y^2 \end{bmatrix}$$

となることを示す．

まず，

$$
\begin{aligned}
P_n(\boldsymbol{x}) &= n \begin{bmatrix} a_k & b_k & c_k \\ b_k & a_k & d_k \\ c_k & d_k & e_k \end{bmatrix}, \\
a_k &= \frac{1}{2}(x^2+y^2)+z^2 - \frac{1}{2}\cos 2k\theta(x^2-y^2) + xy\sin 2k\theta, \\
b_k &= -xy\cos 2k\theta - \frac{1}{2}\sin 2k\theta(x^2-y^2), \\
c_k &= -xz\cos k\theta + yz\sin k\theta, \\
d_k &= -yz\cos k\theta - zx\sin k\theta, \\
e_k &= x^2+y^2
\end{aligned}
$$

となる．ゆえに，$n \geq 3$ のとき，

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n-1} a_k = n\left(\frac{1}{2}(x^2+y^2)+z^2\right), \\
&\sum_{k=0}^{n-1} b_k = \sum_{k=0}^{n-1} c_k = \sum_{k=0}^{n-1} d_k = 0, \\
&\sum_{k=0}^{n-1} e_k = n\left(x^2+y^2\right)
\end{aligned}
$$

となる．ここで下の補題を用いた．

［補題 1］$0 \leq j \leq n-1$ のとき，$\theta = \frac{2\pi}{n}$ とすると．

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n-1} \cos jk\theta = \begin{cases} n & (k=0) \\ 0 & (1 \leq k \leq n-1), \end{cases} \\
&\sum_{k=0}^{n-1} \sin jk\theta = 0
\end{aligned}
$$

である．

以上より，

$$I = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix},$$

$$\alpha = n\rho \int_{\boldsymbol{V}_0} \left\{ \frac{1}{2}(x^2+y^2)+z^2 \right\} dxdydz,$$
$$\beta = n\rho \int_{\boldsymbol{V}_0} (x^2+y^2) dxdydz$$

となる．すなわち，n 回対称の剛体は，回転軸を z 軸とする対称ゴマであると言える．

2.2 正多面体の慣性モーメントテンソル

次に，5 種の正多面体の慣性モーメントテンソルについて考察する．正多面体の中心と任意の頂点を通る直線を回転軸とすると，正四面体や立方体，正十二面体は 3 回対称，正八面体は 4 回対称，正二十面体は 5 回対称であることが以下の 5 つの図から分かる．

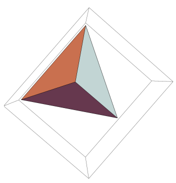
図 1 正四面体

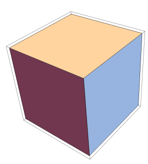
図 2 立方体

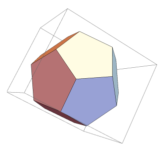
図 3 正十二面体

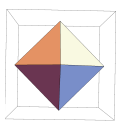
図 4 正八面体

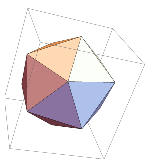
図 5 正二十面体

したがって，2.1 節の結果より，正多面体の中心を原点，1 つの頂点を z 軸上にとるとき，$\boldsymbol{e}_3 = (0,0,1)^T$ は慣性モーメントテンソルの固有ベクトルであり，その固有値 $\alpha = I_z$ である．

また，正多面体の中心を原点 O とし，頂点をそれぞれ $P_1, P_2, ..., P_n$ とするとき，原点 O から任意の頂点 P_i に向かうベクトル $\boldsymbol{u}_i = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は，慣性モーメントテンソルの固有ベクトルとなる．それに対応する固有値 λ_i はどの頂点を選んでも等しく，$\lambda_i = \alpha (i \leq i \leq n)$ である．ゆえに，$\boldsymbol{u}_i$ の中から一次独立なベクトルを 3 つ選び，それぞれ $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ とし，$U = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$ とすると，

$$\begin{aligned} I &= U \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} U^{-1} \\ &= U\alpha U^{-1} = \alpha U U^{-1} = \alpha E \end{aligned} \tag{1}$$

となる．ここで，E は単位行列であり，α は主慣性モーメントである．

以上より，正多面体の重心を中心とした慣性モーメントテンソルは，単位行列の定数倍となる．すなわち，正多面体にその重心を通る軸を取り付けた剛体は，その軸を回転軸とした対称ゴマである．

次節では，5 種の正多面体について主慣性モーメント α を具体的に示す．

2.3 正多面体の主慣性モーメント

この節では，単位円に内接する密度 ρ の正多面体 V の主慣性モーメント α を具体的に計算した．(1) から，主慣性モーメント

$$I_{11} = I_{22} = I_{33} = \alpha = \int_V \rho(y^2+z^2)\, dxdydz$$

を計算すればよい．これを具体的に計算し，四面体については，

$$\alpha = \frac{16}{135\sqrt{3}} \fallingdotseq 0.205$$

立方体については，

$$\alpha = \frac{16}{27\sqrt{3}} \fallingdotseq 0.342$$

正八面体については，

$$\alpha = \frac{4}{15} \fallingdotseq 0.267$$

正十二面体については，

$$\alpha = \frac{8(14+5\sqrt{5})}{135\sqrt{3}} \fallingdotseq 0.862$$

正二十面体については，

$$\alpha = \frac{8}{15}\sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{5}}} \fallingdotseq 0.734$$

を得た．ちなみに，密度 ρ 単位球の主慣性モーメントは

$$\alpha = \frac{8\pi}{15} \fallingdotseq 1.676$$

である．

2.4 結論

以上のように，等密度の 5 つの正多面体の慣性モーメントテンソルは単位行列の定数倍となる．これらの正多面体の重心に任意の角度で軸を通した場合，対称コマの条件を満たす．

3 おわりに

本研究では，正多面体の慣性モーメントテンソルの簡潔な計算法を考案し，実際にすべての正多面体について，慣性モーメントテンソルを求めた．剛体が対称ゴマであることを証明するためには，その剛体が n 回対称であることを示すことが効率的である．立方体にその中心を通る軸を通したコマを 3D プリンターで製作したが，重すぎて指で回すことができず，理論を検証することができなかったため，シミュレーションは今後の課題となった．

参考文献

[1] 十河清・和達三樹・出口哲生：「ゼロからの力学 II 」岩波書店，東京（2013）．

[2] 戸田盛和：「コマの科学」岩波書店，東京 (1980)．