

単四面体と多面体による新しい共通展開図の作製

2015SS003 浅田 晴紀

指導教員：杉浦 洋

1 はじめに

本研究では、立方体と単四面体の共通展開図の構成法を基に、単四面体との組み合わせによる多面体の共通展開図を作製することを試みる。

単四面体とは、すべての面が合同な4枚の三角形を面とする四面体である。また、共通展開図とは複数の多面体が折れる展開図のことである。なお、2つの異なる直方体を作る共通展開図や立方体と八面体の共通展開図も存在するが、ここでは扱わないことにする。

本論文では、p2タイリングを用いて多面体との共通展開図を可能な限り発見し、実際に作製し考察していく。

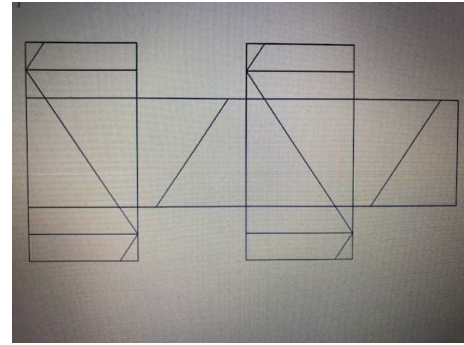


図2 立方体と単四面体の共通展開図

2 共通展開図の作製

2.1 p2タイリングによる共通展開図の定理

p2タイリングとは、境界線上の4点を中心に展開図をコピーし、それぞれを180°回転し貼り付け、平面を埋め尽くすタイリングである。以下に共通展開図の定理を示す。

・共通展開図の定理

[定理1] 立方体と「ほぼ正四面体」が両方折れる展開図が存在する。ここで「ほぼ正四面体」は単四面体で、辺の長さの誤差は高々 2.89×10^{-1796} である。

[定理2] p2タイリングのタイルは、単四面体の展開図であり、単四面体の展開図はp2タイリングのタイルである。

2.2 立方体と単四面体の共通展開図の作製

2.1節の定理より、この手法を用いて単四面体との共通展開図を見つける。

本研究では実際に模型を作るため、立方体と単四面体との共通展開図を導いた。

検証した展開図を基に、実際に組み立てていく。厚さ2mmの木の板を、図2に示す共通展開図の外枠の線にしたがい切り取り、内部の線にはカッターで切り込みを入れた。また、それぞれの展開図を判別できるように、立方体の展開図には青、単四面体の展開図には黄のテープを貼った。図3、4は展開図を組み立てたものであり、図から共通展開図が組み立てられることが分かった。



図3 表折で組み立てた立方体

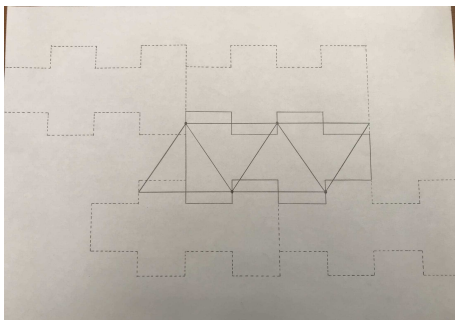


図1 p2タイリングによる単四面体の展開図

検証手順より、展開図に取った4点からそれぞれ180°回転させ、展開図のコピーを敷き詰めていく。図1より、立方体の展開図はp2タイリングが行えることが分かり、4点を結んだ単四面体の展開図を図に示した。また、結果から共通展開図の定理1、2が示されることが分かる。



図4 裏折で組み立てた単四面体

3 単四面体と多面体との共通展開図

3.1 一般的な多面体の展開図

共通展開図を作製できたことから、多面体との共通展開図を見つけていく。

ここでは共通展開図を見つけるにあたり、 p_2 タイリングが行えるか否かによって判断をする。これは共通展開図の定理に基づく。

本研究ではよりタイリングを行いやすいものを見つけるため、八面体、十二面体、二十面体の各多面体で特定の展開図を抜粋して考察した。

3.2 p_2 タイリングによる検証

共通展開図の定理と検証手順を基に、 p_2 タイリングを用いた検証を行う。本研究での展開図は凸多面体に限定し、八面体では双四角錐と異相双三角柱、十二面体では双四角錐柱と菱形十二面体、三方四面体の3種類、二十面体では異相双三角台塔柱とねじれ双十角錐の展開図について検証した。

以下の図では、展開図をタイリングできた例とできなかった例を挙げる。

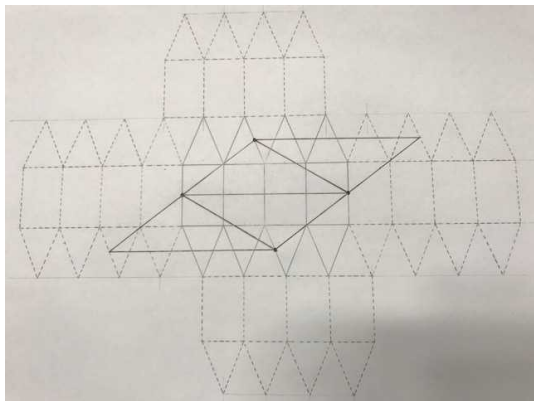


図 5 双四角錐柱の共通展開図

図 5 は十二面体である双四角錐柱の展開図である。検証手順から 4 点を取り、180 回転させた展開図のコピーをまわりに敷き詰めた。図 5 で展開図の敷き詰めが行えたことにより、単四面体の展開図が導かれ、共通展開図があることが分かった。

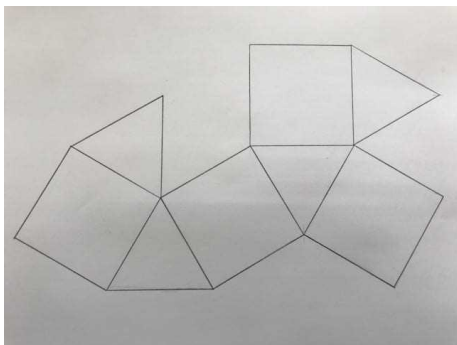


図 6 異相双三角柱の展開図

一方で、タイリングを行えなかった展開図もある。図 6 は異相双三角柱の展開図だが、図から分かるように上下非対称であるため、展開図のコピーをタイリングできないことが分かる。よって単四面体との共通展開図は見つけれない。

3.3 切り込みを入れた展開図

最後に切り込みを入れた場合の展開図について考察していく。切り込みを入れ、形が変わった場合でも p_2 タイリングが行えるかを検証した。以下にタイリングを行った過程を示した展開図を載せた。なお、元の展開図は 2.2 節で検証した立方体の展開図である。

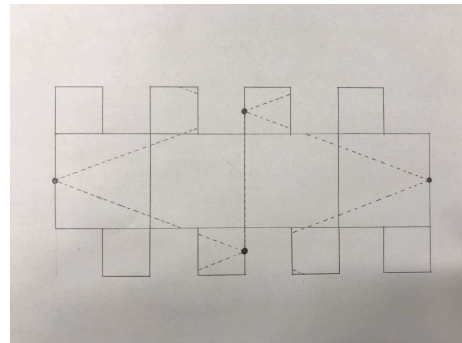


図 7 切り込みを入れた立方体の展開図

検証手順より、4 点を取りまわりに回転させた展開図のコピーを敷き詰めた。図 7 の展開図は対称性があることと、180 回転させても向きが変わらないことから、同じ展開図を上下に敷き詰めていけることが分かる。また、図示した両端の 2 点から横に展開図を敷き詰めていけるので、この展開図は p_2 タイリングを行うことができた。

4 おわりに

本研究では、単四面体と多面体との共通展開図について研究した。

立方体の展開図から単四面体の展開図が得られることを示し、実際に二つの展開図を組み立てることができた。また、 p_2 タイリングの証明を行ったことで、様々な多面体の展開図からタイリングすれば単四面体の展開図を見つけられることが分かった。しかし、元の展開図に微かな隙間が見られる場合は、 p_2 タイリングによる検証が難しいと考えられる多面体が多かった。

以上の実験と考察により、 p_2 タイリングを用いてタイリングを行えば、共通展開図を見つけられることが分かった。

参考文献

- [1] Jin Akiyama : Tile-Makers and Semi-Tile-Makers, The American Mathematical Monthly, August-September 2007, pp. 603-609(2007).
- [2] 野島 武敏, 萩原 一郎 : 『折紙の数理とその応用』, 共立出版株式会社, 2012.
- [3] 上野 健一 : 共通展開図の作成, 南山大学情報理工学部卒業論文, 2015.