ラトルバックの力学的シミュレーション
-Mathematica による数値シミュレーション-

2015SS002 荒川裕幹

指導教員：杉浦洋

1　はじめに

通常，滑らかな剛体を机上で水平に回すと，回転の方向によらず滑らかに回転し続ける．ところがラトルバックと呼ばれるおもちゃは半楕円体のものであり，特定の方向に回りやすい性質を持っている。逆方向に回した場合，回転が不安定化してガタガタという縦揺れの振動 (rattle) が起こり，いったん回転を止めた後，はじめとは逆に回り始める．このような見かけは鏡映対称なのに明らかに非対称な動きをするラトルバックの特異な運動に興味を持った．

昨年度の卒業研究で中村 [2] は，常微分方程式の数値解法を用いて，ラトルバックの運動の数値シミュレーションすることが可能となった．そのため，本研究では運動方程式に基づき計算プログラムを作成し，数値シミュレーションを行った．まず次の節では，ラトルバックの力学モデルを解説し，次に数値シミュレーションについて解説する．

2　ラトルバック (RB) の力学モデル

以下、ラトルバックを RB と略記する．重心の並進運動の方程式と重心周りの回転運動の方程式，および床と RB の摩擦の方程式から，RB の運動を支配する微分方程式の標準形を導く．

楕円体を高さ H で切断した RB 本体

$$S : f(\boldsymbol{s}) = \frac{s^2}{\alpha^2} + \frac{t^2}{\beta^2} + \frac{u^2}{\gamma^2} - 1 \leq 0, \quad -\gamma \leq u \leq H \tag{1}$$

を考える．

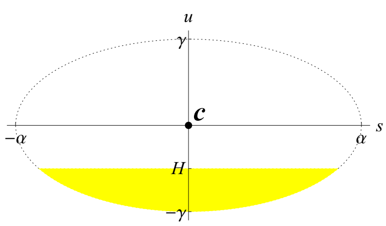


図 1　RB の正面図

RB の局所座標の原点を $\boldsymbol{c} = (c_x, c_y, c_z)$，正規直交軸ベクトルを $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ とする．$\boldsymbol{s} = (s, t, u)$ は RB の局所座標である．この質量を m_1 とする．重心を $\boldsymbol{r} = (r_x, r_y, r_z)$，その局所座標を $\boldsymbol{r}_L = (r_i, r_j, r_k)$ とする．

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{c} + r_i\boldsymbol{i} + r_j\boldsymbol{j} + r_k\boldsymbol{k} = \boldsymbol{c} + A\boldsymbol{r}_L, \tag{2}$$

$$A = (\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}) \in \mathbb{R}^{3\times 3} \tag{3}$$

である．

さらに，対称性をゆがめるために，RB 本体に質量 m_2 の重りを 2 個，局所座標

$$\boldsymbol{r}_L \pm (s_i, s_j, r_k)$$

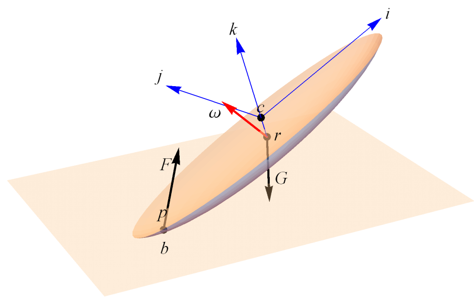
の位置に配置し，本体と重りを合わせたものを，RB とする．質量は $m = m_1 + 2m_2$，重心は，$\boldsymbol{r}_L$ である．

I_0 を局所座標における重心を中心とする RB の慣性モーメントテンソルとする．大域座標における重心周りの慣性モーメントテンソルは

$$I = AI_0A^T \tag{4}$$

である．

RB は床の上を動摩擦係数 μ_1 で滑るものとする．重力加速度を $g = 9.8[m/s^2]$ とする．以下のように記号を設定する．



RB のモデル図

床の RB の接点： $\boldsymbol{b} = (b_x, b_y, 0), \quad \boldsymbol{b}_{xy} = (b_x, b_y),$
RB の床との接点： $\boldsymbol{p} = (p_x, p_y, p_z) = \boldsymbol{b},$
$\boldsymbol{p}_{xy} = (p_x, p_y),$
重心周りの角速度： $\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z),$
重力ベクトル： $\boldsymbol{G} = (0, 0, -mg),$
床の抗力： $\boldsymbol{F} = (F_x, F_y, F_z)$

3　数値シミュレーション

RB の力学的シミュレーションを Mathematica 上に実現し，数値実験を行った．今回は微分方程式の数値解法には，古典的 4 次ルンゲ・クッタ法を用いた．
4 章で述べたアルゴリズムにより，式 (4.20) の関数

$$f(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}, \boldsymbol{\omega})$$

を Mathematica で書き，方程式

$$\dot{\boldsymbol{x}} = f(\boldsymbol{x})$$

を古典的４次ルンゲ・クッタ法で解いた．
[例１] 解の精度を確かめるため動摩擦係数 $\mu_1 = 0$ のときの力学的エネルギーの保存を観察する．
初期値 $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}(0)$ を
$\boldsymbol{b}_{xy} = (0, 0)$, $\boldsymbol{i} = (5/\sqrt{26}, 0, 1/\sqrt{26})$, $\boldsymbol{j} = (0, 1, 0)$,
$\boldsymbol{k} = (\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j})$, $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, 2\pi)$, $\boldsymbol{v}_{xy} = (0, 0)$
で設定し，時間ステップ $dt = \frac{1}{1000}$ で $t \in [0, 1]$ において方程式を解いた．力学的エネルギー=運動エネルギー＋ポテンシャルエネルギーの変化をグラフ（図 2）に表したが，RB の力学的エネルギーは誤差範囲で保存されている．実際，$t = 0$ から $t = 1$ までに力学的エネルギーは 0.002403027443 から 0.002403024365 まで変化したが，誤差の範囲内である．1 秒あたりのルンゲ・クッタ法のステップ数は 1000 である．

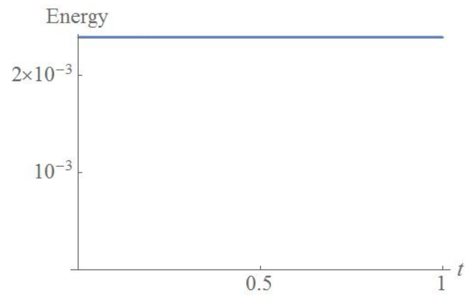


図 2　動摩擦係数 $\mu_1 = 0$ のときのエネルギー

[例 2](無反転) 動摩擦係数 $\mu_1 = 0.1$ として観察する．
初期値 $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}(0)$ を
$\boldsymbol{b}_{xy} = (0, 0)$, $\boldsymbol{i} = (5/\sqrt{26}, 0, 1/\sqrt{26})$, $\boldsymbol{j} = (0, 1, 0)$,
$\boldsymbol{k} = (\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j})$, $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, 2\pi)$, $\boldsymbol{v}_{xy} = (0, 0)$
で設定し，時間ステップ $dt = \frac{1}{1000}$ で $t \in [0, 2]$ において方程式を解いた．ω_x, ω_y の絶対値は急激に増大するが，摩擦の影響を受けるため減衰していく．ω_z はプラスの値で増減するも，ω_x, ω_y が小さくなるにつれ ω_z は徐々に安定を保つようになる．3 つの成分を同時に表したのが図 4 である．ω_x, ω_y の一時的な増減があるが一貫して ω_z はプラスで値をとっている．このことから，回転方向は常に上から見て左回りであることを示す．

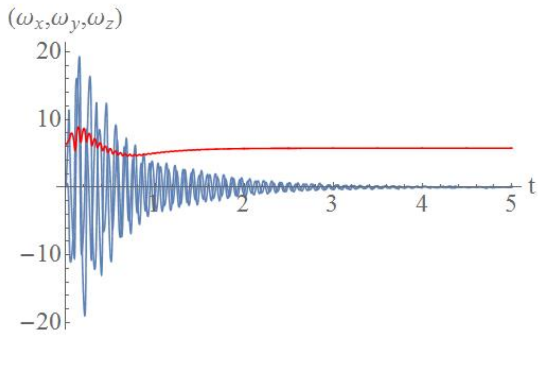


図 3　動摩擦係数 $\mu_1 = 0.1$ のときの $\omega_x, \omega_y, \omega_z$

[例 3](反転) 動摩擦係数 $\mu_1 = 0.1$ として観察する．
初期値 $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}(0)$ を
$\boldsymbol{b}_{xy} = (0, 0)$, $\boldsymbol{i} = (5/\sqrt{26}, 0, 1/\sqrt{26})$, $\boldsymbol{j} = (0, 1, 0)$,
$\boldsymbol{k} = (\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j})$, $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, 2\pi)$, $\boldsymbol{v}_{xy} = (0, 0)$
で設定し，時間ステップ $dt = \frac{1}{1000}$ で $t \in [0, 2]$ において方程式を解いた．ω_x, ω_y の絶対値は急激に増大するが，摩擦の影響を受けるため減衰していく．ω_z は当初はマイナスの値をとるも，時間経過とともに増大しプラスの値をとるようになり，ω_x, ω_y が小さくなるにつれ ω_z は徐々に安定を保つようになる．このことから ω_z が回転の向きを決める主要軸となることがいえる．3 つの成分を同時に表したのが図 5 であるが，ω_z はマイナスからプラスの値になるため，回転方向の反転が起こり，当初回転方向は上から見て右回りだったものが，RB 現象により左回りになったことを示す．

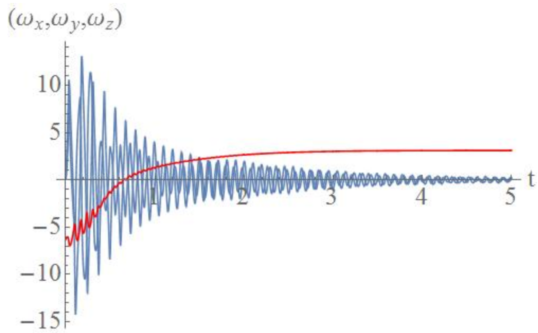


図 4　動摩擦係数 $\mu_1 = 0.1$ のときの $\omega_x, \omega_y, \omega_z$

4　おわりに

本研究では，昨年度の中村 [2] が導いた運動の方程式に基づき計算プログラムを作成し，Mathematica 上で数値シミュレーションを行った。シミュレーションの結果，実際に RB 現象が起こることが観察された．また，ω_x, ω_y は摩擦の影響を受け小さくなるが，ω_z はある一定値で安定するため，ω_z が回転の向きを決める主要軸となることがわかった．すなわち，角速度が z 成分のみになると，接点，重心が z 軸上に並び，摩擦力のモーメントが 0 になる．したがって，摩擦による減速がなくなり，回転が永続する．そのため，RB を上から見たとき左回りに回転させるとそのままの回転方向を保つが，右回りに回転させると数秒後回転方向が反転し，左回りになることがわかった．この現象は，実際の RB で起こるようにシミュレーションにおいてもそれが再現できた．

参考文献

[1] 十河清・和達三樹・出口哲生：「ゼロからの力学 I II」．岩波書店，東京（2013）．

[2] 中村拓都 ： ラトルバックの力学的シミュレーション，南山大学理工学部卒業論文 (2017).