

物理振り子による傾斜倒立

2015SC095 竹下薫

指導教員：杉浦洋

1 はじめに

物理振り子が一定角の傾斜を維持したまま静止倒立し続けることは重力が存在する限り、実現不可能であるという意見がある。私は可制御性の定義について考えた結果、傾斜方向を維持したまま倒立することは可能なのではないかと考えた。すなわち、物理振り子の支点到に制御入力を与え続けることで傾斜倒立が可能なのではないかと考えた。

2 可制御性

著書 [4] に基づき、可制御性について解説する。可制御性 (controllability) は、つぎのように定義される。[定義 2.1] n 次線形系 $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$ が可制御とは、任意の初期状態 $\mathbf{x}(0)$ を、任意の有限時間内 $0 \leq t \leq t'$ に、任意の状態 $\mathbf{x}(t')$ に移行させるような制御入力 $\mathbf{u}(t)$ が存在することをいう。

可制御性については、次の定理が成り立つ。

[定理 2.2] 以下の 4 つの条件は等価であり、 n 次線形系 (1) が可制御であるための必要十分条件である。

定義 2.1: 任意初期状態を、任意有限時間内に、任意状態に移動可能、

$$\text{条件 C1: } \int_0^t e^{A\tau} B B^T e^{A^T \tau} d\tau > 0 \quad (\forall t > 0),$$

$$\text{条件 C2: } \text{rank} [B \ AB \ \dots \ A^{n-1} B] = n,$$

条件 C3: F を選んで、 $A - BF$ の固有値を任意に設定可能。

正方行列行列 $C = [B \ AB \ \dots \ A^{n-1} B]$ を可制御行列という。

2.1 C1 \Rightarrow 定義 2.1 の証明

条件 C1 の行列を

$$G(t) = \int_0^t e^{A\tau} B B^T e^{A^T \tau} d\tau \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

とする。 n 次線形系の解は

$$\mathbf{x}(t) = e^{At} \mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (1)$$

となることが知られている。 $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^*$ を目標とするとき、 $0 \leq \tau \leq t$ において、状態フィードバックを

$$\mathbf{u}(\tau) = B^T e^{A^T(t-\tau)} G(t)^{-1} (\mathbf{x}^* - e^{At} \mathbf{x}(0))$$

とし、(1) に代入すれば、

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= e^{At} \mathbf{x}(0) \\ &+ \int_0^t e^{A(t-\tau)} B (B^T e^{A^T(t-\tau)} G(t)^{-1} (\mathbf{x}^* - e^{At} \mathbf{x}(0))) d\tau \end{aligned}$$

$t \rightarrow t - \tau$, と変数変換をすると、

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= e^{At} \mathbf{x}(0) \\ &+ \int_0^t (e^{A\tau} B B^T e^{A^T \tau}) d\tau G(t)^{-1} (\mathbf{x}^* - e^{At} \mathbf{x}(0)) \\ &= \mathbf{x}^* \end{aligned}$$

となり、目標が達成される。

3 倒立振子の運動方程式

[1], [2], [3] に従って、倒立振子の運動方程式を導く。重力加速度を g 、物理振り子の質量を m 、長さを ℓ 、密度を $\rho = m/\ell$ とする。 y 軸と振り子がなす角を θ 、支点的の位置ベクトルを $\mathbf{x} = (x, 0)$ 、重心の位置ベクトルを $\mathbf{c} = \mathbf{x} + \frac{\ell}{2}(\sin \theta, \cos \theta)$ 、重力ベクトルは $\mathbf{G} = (0, -mg)$ である。床から受ける抗力を $\mathbf{F} = (F_x, F_y)$ とする。重心回りのモーメントを I は

$$I = \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} x^2 \rho = \frac{m\ell^2}{12} \quad (2)$$

である。重心の並進運動の方程式

$$m\ddot{\mathbf{c}} = \mathbf{F} + \mathbf{G} \quad (3)$$

を考える。

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{c}} &= \dot{\mathbf{x}} + \frac{\ell}{2} \dot{\theta} (\cos \theta, -\sin \theta) \\ \ddot{\mathbf{c}} &= \ddot{\mathbf{x}} + \frac{\ell}{2} \ddot{\theta} (\cos \theta, -\sin \theta) - \dot{\theta}^2 (\sin \theta, \cos \theta) \end{aligned} \quad (4)$$

(3) を (2) に代入すると、 $\dot{\theta} = \omega$ であるから、

$$\begin{aligned} m(\ddot{\mathbf{x}} + \frac{\ell}{2} \dot{\omega} (\cos \theta, -\sin \theta) - \omega^2 (\sin \theta, \cos \theta)) \\ = \mathbf{F} + \mathbf{G}. \end{aligned} \quad (5)$$

次に重心回りの回転運動の方程式

$$I\dot{\omega} = \mathbf{N} = (\mathbf{x} - \mathbf{c}) \times \mathbf{F}$$

を考える。

$$\begin{aligned} \mathbf{x} - \mathbf{c} &= -\frac{\ell}{2} (\sin \theta, \cos \theta), \\ (\mathbf{x} - \mathbf{c}) \times \mathbf{F} &= -\frac{\ell}{2} (\sin \theta, \cos \theta) \times (F_x, F_y) \\ &= \frac{\ell}{2} (F_y \sin \theta - F_x \cos \theta) \end{aligned}$$

であるから、

$$I\dot{\omega} = \frac{\ell}{2} (F_y \sin \theta - F_x \cos \theta) \quad (6)$$

となる。(5)(6)より、 F を消去し、 x, ω の方程式を導く。(5)より、

$$F_x = m\ddot{x} + \frac{\ell}{2}m(\dot{\omega} \cos \theta - \omega^2 \sin \theta),$$

$$F_y = m\ddot{y} + \frac{\ell}{2}m(-\dot{\omega} \sin \theta - \omega^2 \cos \theta) + mg$$

これらを(6)に代入すると、

$$I\dot{\omega} = \frac{m\ell}{2} \sin \theta \left(\frac{\ell}{2}(-\dot{\omega} \sin \theta - \omega^2 \cos \theta) + g + \ddot{y} \right) - \frac{m\ell}{2} \cos \theta \left\{ \ddot{x} + \frac{\ell}{2}(\dot{\omega} \cos \theta - \omega^2 \sin \theta) \right\}$$

$$= \frac{m\ell}{4} (2(g + \ddot{y}) \sin \theta - 2\ddot{x} \cos \theta - \ell\dot{\omega}) \quad (7)$$

となる。 $I = \frac{m\ell^2}{12}$ を(9)に代入すると、

$$\frac{m\ell^2}{12} \dot{\omega} = \frac{m\ell}{4} (2(g + \ddot{y}) \sin \theta - 2\ddot{x} \cos \theta - \ell\dot{\omega}). \quad (8)$$

ゆえに、角度 θ に関する2階乗微分方程式

$$\dot{\omega} = \frac{3}{2\ell} (g \sin \theta - \ddot{x} \cos \theta + \ddot{y} \sin \theta) \quad (9)$$

が得られた。

4 x 軸方向の制御入力について

(9)について、 $\theta = 0$ の近傍で運動方程式を線形化すると、 $\sin \theta \approx 0$, $\cos \theta \approx 1$ ゆえ、

$$\dot{\omega} = \frac{3}{2\ell} (g\theta - \ddot{x} + \ddot{y}\theta) \quad (10)$$

となる。

支点の位置ベクトル x の要素を \ddot{x} を制御入力することを想定して(10)を状態方程式に書き換えると、4次系

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{x} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{x} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \theta \\ x \\ \dot{\theta} \\ \dot{x} \end{pmatrix} + B u(t) = Ax + Bu(t) \quad (11)$$

が得られる。ここで、位置ベクトル x 、行列 B は

$$x = \begin{pmatrix} \theta \\ x \\ \dot{\theta} \\ \dot{x} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (12)$$

である。また、線形系の制御数値シミュレーションを行ったものが図1である。

5 y 軸方向への制御入力について

x 軸方向にのみ制御入力を加えた結果、制御とは言い難い結果になったため、 y 軸方向に制御入力を加えることを試みた。 \ddot{y} のみを制御入力とした場合の物理系の方程式は式(9)より、

$$\dot{\omega} = \frac{3}{2\ell} (g \sin \theta + \ddot{y} \sin \theta)$$

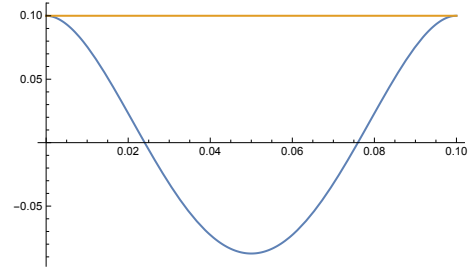


図1 線形系の制御シミュレーション

である。対応する線形系は、 $\ddot{y}\theta$ が微量の2次項として無視されるため、

$$\dot{\omega} = \frac{3}{2\ell} g\theta$$

である。このため、線形系は制御入力 \ddot{y} を含まず、明らかに不可制御である。この物理系を制御するためには、このような、近似線形系を経由せずに直接制御入力を設計する必要がある。また、制御入力を $u[\tau] = k \cos(2\pi\tau/t)$ と、設計し、数値シミュレーションを行った結果が図2である。

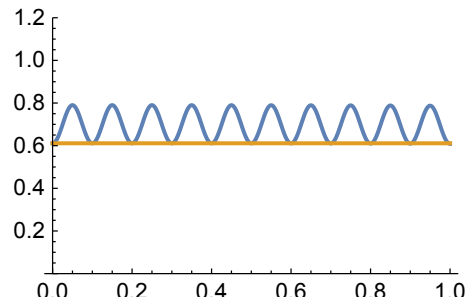


図2 線形系の制御シミュレーション

6 今後の課題

\ddot{x} のみを制御入力とした系は、線形化すると可制御である。斜傾倒立状態を経由する、大きな振幅の周期運動を起こす制御入力を設計することが、制御理論によりできる。これは、望むものではない。 \ddot{y} のみを制御入力とした系は、線形化すると不可制御である。しかし、物理系に対し直接制御入力を設計し、斜傾倒立状態を経由する、いくらでも小さな振幅の周期運動を起こさせることができた。周期運動は不安定で、小さな外乱で壊れてしまう。実機では、これを安定化する制御が必要である。

参考文献

- [1] 戸田盛和, 物理入門コース『力学』, 岩波書店, 1982.
- [2] 十河清, 和達三樹, 出口哲生, 『ゼロからの力学1』, 岩波書店, 2005.
- [3] 十河清, 和達三樹, 出口哲生, 『ゼロからの力学2』, 岩波書店, 2005.
- [4] 梶原宏之, 線形システム制御入門, コロナ社, 2000.