円筒鏡による両眼視アナモルフォーシス

2015Sc068 永井　智也

指導教員：杉浦　洋

1　アナモルフォーシスについて

アナモルフォーシスは大きく分けて，鏡を介して補正するように描かれた反射光学アナモルフォーシスと，何も介しない平面的アナモルフォーシスの二種類がある．

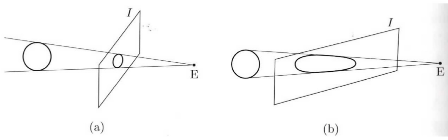

図 1

今まで遠近法を考える際には，図 1 左に示すように，視点 $\boldsymbol{e}$ と対象物を結ぶ線に垂直にカンバス $\boldsymbol{I}$ を置くことを仮定していた．しかし，遠近法では，そのような条件は必ずしもなくてよい．図 1 右に示すように，カンバス $\boldsymbol{I}$ が，視点 $\boldsymbol{e}$ と対象物を結ぶ線に平行に近くてもかまわない．視点がカンバスを含む面に載ってさえいなければ遠近法は成立する．しかし，図 1 のようにカンバスを斜めに置くと，遠近法の像は，普通とはかなりの印象の変わったものになる．そのような像を正面から見ても何が描かれているかいるのかわからない場合が多い．斜めのほうからすかして見たとき，初めて描かれているものが何かわかる．このように，普通ではないある特別な見方をしたときだけ描かれているものがわかる絵が，アナモルフォーシスである．そして，そのような絵の描き方は歪像画法と呼ばれている．[2]

図 2 からわかるように，無限遠点から円筒鏡を見るとき，その像は，円柱の内部の平面 $\boldsymbol{S}$ に描かれているように見えているとき，実際には，円柱の側面は鏡であるから鏡面で反射し，底面を含む平面との交点にある物を見ることになる．例えば，点 $\boldsymbol{B}$ を見ているつもりが実は点 $\boldsymbol{B'}$ を見ているのであり，点 $\boldsymbol{D}$ を見ているつもりが実は点 $\boldsymbol{D'}$ を見ているのである．ただし，点 $\boldsymbol{A}$ を見ているときはそのままで，点 $\boldsymbol{C}$ を見ているつもりが実は点 $\boldsymbol{C'}$ を見ているのである．[3]

2　円筒鏡による反射の計算

円筒鏡の鏡面の方程式を

$$x^2+y^2=R^2 \tag{1}$$

とする．視点の位置を $\boldsymbol{e}=(e_1,0,e_3)$, $e_3>R$, とする．$\boldsymbol{e}$ から見て円筒鏡の外の世界は，円筒の内部に縮小された像として映る．像上の点 $\boldsymbol{p}=(p_1,p_2,p_3)$, $p_1^2+p_2^2<R^2$, は外部の点 $\boldsymbol{p}'=(p_1',p_2',p_3')$ が映り込んだものとする．このとき，$\boldsymbol{p}'$ から出た光は，鏡面上の点 $\boldsymbol{q}$ で反射して $\boldsymbol{e}$ に届

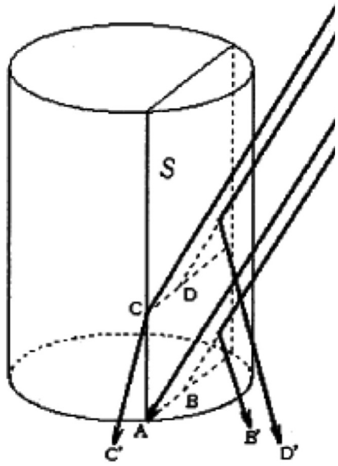

図 2

き，あたかも $\boldsymbol{p}$ から来たかのように錯覚される．したがって円筒内にある像 I が見えるためには，I 上のすべての点 $\boldsymbol{p}$ に対して円筒外部に $\boldsymbol{p}'$ を配置すればよい．以下に $\boldsymbol{p}'$ の計算方法を述べる．

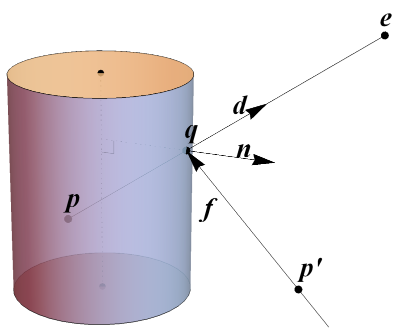

図 3

＜1＞反射点 $\boldsymbol{q}$ からの計算

$\boldsymbol{p}$ から出た光線は鏡面上の点 $\boldsymbol{q}$ で反射して目 $\boldsymbol{e}$ に入る．$\boldsymbol{e}$ と $\boldsymbol{q}$ を通る直線は $\boldsymbol{p}$ も通るので，$\boldsymbol{q}$ は $\boldsymbol{e}$，$\boldsymbol{p}$ を通る直線と鏡面との交点である．すなわち

$$\boldsymbol{q}=(q_1,q_2,q_3)=\boldsymbol{e}+t(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{e}), \tag{2}$$

$$q_1^2+q_2^2=R^2 \tag{3}$$

である．(2) から

$$q_1=e_1+t(p_1-e_1), \tag{4}$$

$$q_2=0+t(p_2-0) \tag{5}$$

である．これを (3) に代入して，t に関する 2 次方程式を得る．その解を $t=t_1$，t_2 とする．視線は円筒の前面にあるので，t_1 と t_2 のうち小さい方を採用して解を

$$t^* = \min(t_1, t_2) \tag{6}$$

とする．反射点は

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{e} - t^*(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{e}), \tag{7}$$

である．

＜2＞入射ベクトル $\boldsymbol{f}$ の計算

$\boldsymbol{q}$ における鏡面の外向単位法線 $\boldsymbol{n}$ は

$$\boldsymbol{n} = (q_x, q_y, 0)/R \tag{8}$$

である．$\boldsymbol{q}$ からの反射ベクトル (単位ベクトル) は

$$\boldsymbol{d} = \frac{\boldsymbol{e} - \boldsymbol{q}}{\|\boldsymbol{e} - \boldsymbol{q}\|} \tag{9}$$

である．入射ベクトルは，反射の法則と Householder の鏡像変換により

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{d} - 2(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{d})\boldsymbol{d} \tag{10}$$

で計算できる．

＜3＞$\boldsymbol{p}'$ の存在範囲

以上により，$\boldsymbol{p}'$ は

$$\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{q} - t\boldsymbol{f} \qquad (t > 0) \tag{11}$$

と表すことができる．$t > 0$ は任意である．t を動かしたときの $\boldsymbol{p}'$ の軌跡が入射光線である．

3　アナモルフォーシス造形における実像位置の決定

実際にアナモルフォーシスを造形するときには (11) の t を具体的に定める必要がある．本研究では，目の位置 $\boldsymbol{e}$ の z 軸方向の変化に対して，$\boldsymbol{p}'$ が動かないように t を定める．このことにより目の位置の垂直方向の変化に対し安定した鏡像が得られ，実在感が増すと期待できる．

定理 3.1　式 (11) の t を $t = \|\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}\|$ と定めると，目の位置 $\boldsymbol{e}$ が z 軸方向に動かすとき，$\boldsymbol{p}'$ の位置は不変である．

（証明）反射点 $\boldsymbol{q}$ における反射は，点 $\boldsymbol{q}$ を含み，法線 $\boldsymbol{n}$ をもつ平面鏡 P の反射に等しい．法線は xy 平面と平行であるから，P は xy 平面と垂直となる．ゆえに P は点 $(q_1, q_2, 0)$ を含む．P は点 $(q_1, q_2, 0)$ を含み，法線 $\boldsymbol{n}$ をもつ平面として特徴づけられる．

式 (4)，(6)，(7)，(8) より，q_1，q_2 は e_3 と独立に決定する．従って，式 (9) の法線 $\boldsymbol{n}$ も e_3 と独立に決定する．これらより，平面鏡 P は e_3 と独立に決定する．ゆえに，P に対して鏡像 $\boldsymbol{p}$ をもつ点を $\boldsymbol{p}'$ とすれば，$\boldsymbol{p}'$ は e_3 によらず目の位置 $\boldsymbol{e}$ から $\boldsymbol{p}$ の位置に見える．

そのときの t の値は平面鏡の反射法則から $t = \|\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}\|$ である．

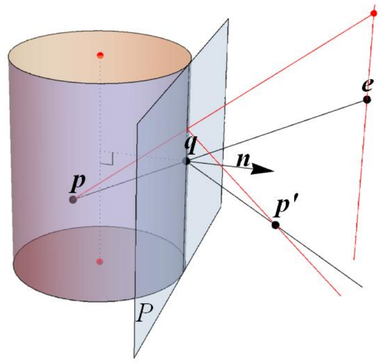

図 4

人間の両眼は，水平に配置されており，両眼視により立体感を得ている．上の定理によれば，円筒鏡を軸を水平に配置し定理の条件で t を計算してアナモルフォーシス像を設計すれば，両眼は同じ鏡像を見ることになり，立体感を損なわないことが期待できる．

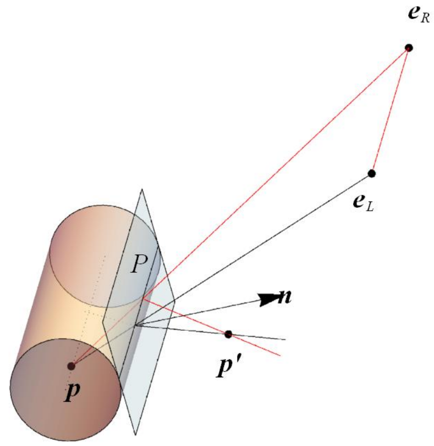

図 5

$\boldsymbol{e}_R$，$\boldsymbol{e}_L$ は左目と右目を表している．図より，両眼視することで $\boldsymbol{p}'$ の一点に集まり、視点の移動によるずれの減少が期待される．

参考文献

[1]『鏡に別の絵が映ってる！不思議な「アナモルフォーズ（歪像画）」いろいろ』: http://www.geocities.jp/sakushiart/ana1.htm.

[2] 杉原　厚吉:『立体イリュージョンの数理』，共立出版 (2006).

[3] 島田　愛淑『3 次元アナモルフォーシス』　南山大学数理情報システム数理学科　杉浦研究室 2016 年度卒業論文集 (2017).

[4] 杉浦　洋:『数値計算の基礎と応用［新訂版]』，サイエンス社 (2009).